

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM TIẾP TUYẾN

A – LÝ THUYẾT VÀ PHƯƠNG PHÁP

1. Tiếp tuyến tại điểm $M(x_0; y_0)$ thuộc đồ thị hàm số:

Cho hàm số $(C): y = f(x)$ và điểm $M(x_0; y_0) \in (C)$. Viết phương trình tiếp tuyến với (C) tại M .

- Tính đạo hàm $f'(x)$. Tìm hệ số góc của tiếp tuyến là $f'(x_0)$
- phương trình tiếp tuyến tại điểm M là: $y = f'(x)(x - x_0) + y_0$

2. Tiếp tuyến có hệ số góc k cho trước

- Gọi (Δ) là tiếp tuyến cần tìm có hệ số góc k .
- Giả sử $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm. Khi đó x_0 thỏa mãn: $f'(x_0) = k$ (*).
- Giải (*) tìm x_0 . Suy ra $y_0 = f(x_0)$.
- Phương trình tiếp tuyến cần tìm là: $y = k(x - x_0) + y_0$

3. Tiếp tuyến đi qua điểm

Cho hàm số $(C): y = f(x)$ và điểm $A(a; b)$. Viết phương trình tiếp tuyến với (C) biết tiếp tuyến đi qua A .

- Gọi (Δ) là đường thẳng qua A và có hệ số góc k . Khi đó $(\Delta): y = k(x - a) + b$ (*)

- Để (Δ) là tiếp tuyến của $(C) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = k(x - a) + b & (1) \\ f'(x) = k & (2) \end{cases}$ có nghiệm.

- Thay (2) vào (1) ta có phương trình ẩn x . Tìm x thay vào (2) tìm k thay vào (*) ta có phương trình tiếp tuyến cần tìm.

Chú ý:

1. Hệ số góc của tiếp tuyến với (C) tại điểm $M(x_0; y_0)$ thuộc (C) là: $k = f'(x_0)$

2. Cho đường thẳng $(d): y = k_d x + b$

$$\text{+) } (\Delta) // (d) \Rightarrow k_\Delta = k_d \qquad \text{+) } (\Delta) \perp (d) \Rightarrow k_\Delta k_d = -1 \Leftrightarrow k_\Delta = -\frac{1}{k_d}$$

$$\text{+) } (\Delta, d) = \alpha \Rightarrow \tan \alpha = \left| \frac{k_\Delta - k_d}{1 + k_\Delta k_d} \right| \qquad \text{+) } (\Delta, Ox) = \alpha \Rightarrow k_\Delta = \pm \tan \alpha$$

3. Cho hàm số bậc 3: $y = ax^3 + bx^2 + cx + d, (a \neq 0)$

- + Khi $a > 0$: Tiếp tuyến tại tâm đối xứng của (C) có hệ số góc nhỏ nhất.
- + Khi $a < 0$: Tiếp tuyến tại tâm đối xứng của (C) có hệ số góc lớn nhất.

B – BÀI TẬP

DẠNG 1: TIẾP TUYẾN TẠI ĐIỂM THUỘC ĐỒ THỊ HÀM SỐ:

Câu 1. Cho hàm số $y = f(x)$, có đồ thị (C) và điểm $M_0(x_0; f(x_0)) \in (C)$. Phương trình tiếp tuyến của (C) tại M_0 là:

A. $y = f'(x)(x - x_0) + y_0$.

B. $y = f'(x_0)(x - x_0)$.

C. $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$.

D. $y - y_0 = f'(x_0)x$.

Hướng dẫn giải:

Chọn C

Câu 2. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = (x+1)^2(x-2)$ tại điểm có hoành độ $x = 2$ là

A. $y = -8x + 4$.

B. $y = 9x + 18$.

C. $y = -4x + 4$.

D. $y = 9x - 18$.

Hướng dẫn giải:

Chọn D.

Gọi $M(x_0; y_0)$ là tọa độ tiếp điểm.

Ta có $x_0 = 2 \Rightarrow y_0 = 0$.

$$y = (x+1)^2(x-2) = x^3 - 3x^2 + 2 \Rightarrow y' = 3x^2 - 3 \Rightarrow y'(2) = 9.$$

Vậy phương trình tiếp tuyến cần tìm là $y = 9(x-2) + 0 \Leftrightarrow y = 9x - 18$.

Câu 3. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị của hàm số $y = x(3-x)^2$ tại điểm có hoành độ $x = 2$ là

- A.** $y = -3x + 8$. **B.** $y = -3x + 6$. **C.** $y = 3x - 8$. **D.** $y = 3x - 6$.

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Gọi $M(x_0; y_0)$ là tọa độ tiếp điểm.

Ta có $x_0 = 2 \Rightarrow y_0 = 2$.

$$y = x(3-x)^2 = x^3 - 6x^2 + 9x \Rightarrow y' = 3x^2 - 12x + 9 \Rightarrow y'(2) = -3.$$

Vậy phương trình tiếp tuyến cần tìm là $y = -3(x-2) + 2 \Leftrightarrow y = -3x + 8$.

Câu 4. Cho đường cong $(C): y = x^2$. Phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm $M(-1; 1)$ là

- A.** $y = -2x + 1$. **B.** $y = 2x + 1$. **C.** $y = -2x - 1$. **D.** $y = 2x - 1$.

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

$$y = x^2 \Rightarrow y' = 2x.$$

$$y'(-1) = -2.$$

Phương trình tiếp tuyến cần tìm: $y = -2(x+1) + 1 \Leftrightarrow y = -2x - 1$.

Câu 5. Cho hàm số $y = \frac{x^2 + x}{x-2}$. Phương trình tiếp tuyến tại $A(1; -2)$ là

- A.** $y = -4(x-1) - 2$. **B.** $y = -5(x-1) + 2$. **C.** $y = -5(x-1) - 2$. **D.** $y = -3(x-1) - 2$.

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

$$y = \frac{x^2 + x}{x-2} \Rightarrow y' = \frac{x^2 - 4x - 2}{(x-2)^2}, y'(1) = -5.$$

Phương trình tiếp tuyến cần tìm: $y = -5(x-1) - 2 \Leftrightarrow y = -5x + 3$.

Câu 6. Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 7x + 2$. Phương trình tiếp tuyến tại $A(0; 2)$ là:

- A.** $y = 7x + 2$. **B.** $y = 7x - 2$. **C.** $y = -7x + 2$. **D.** $y = -7x - 2$.

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

$$\text{Ta có: } y' = x^2 - 6x + 7$$

$$\text{Hệ số góc tiếp tuyến } y'(0) = 7$$

Phương trình tiếp tuyến tại $A(0; 2)$:

$$y = 7(x-0) + 2 = 7x + 2.$$

Câu 7. Gọi (P) là đồ thị của hàm số $y = 2x^2 - x + 3$. Phương trình tiếp tuyến với (P) tại điểm mà (P) cắt trục tung là:

- A.** $y = -x + 3$. **B.** $y = -x - 3$. **C.** $y = 4x - 1$. **D.** $y = 11x + 3$.

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Ta có : (P) cắt trục tung tại điểm $M(0;3)$.

$$y' = 4x - 1$$

Hệ số góc tiếp tuyến : $y'(0) = -1$

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị (P) tại $M(0;3)$ là $y = -1(x-0) + 3 = -x + 3$.

Câu 8. Đồ thị (C) của hàm số $y = \frac{3x+1}{x-1}$ cắt trục tung tại điểm A. Tiếp tuyến của (C) tại điểm A

có phương trình là:

A. $y = -4x - 1$.

B. $y = 4x - 1$.

C. $y = 5x - 1$.

D. $y = -5x - 1$.

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Ta có : điểm $A(0;-1)$

$$y' = \frac{-4}{(x-1)^2} \Rightarrow \text{hệ số góc tiếp tuyến } y'(0) = -4$$

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm $A(0;-1)$ là :

$$y = -4(x-0) - 1 = -4x - 1.$$

Câu 9. Cho hàm số $y = \frac{2x-4}{x-3}$ có đồ thị là (H). Phương trình tiếp tuyến tại giao điểm của (H) với

trục hoành là:

A. $y = 2x - 4$.

B. $y = 3x + 1$.

C. $y = -2x + 4$.

D. $y = 2x$.

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

Giao điểm của (H) với trục hoành là $A(2;0)$. Ta có: $y' = \frac{-2}{(x-3)^2} \Rightarrow y'(2) = -2$

Phương trình tiếp tuyến cần tìm là $y = -2(x-2)$ hay $y = -2x + 4$.

Câu 10. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $f(x) = x^3 - 2x^2 + 3x$ tại điểm có hoành độ $x_0 = -1$ là:

A. $y = 10x + 4$.

B. $y = 10x - 5$.

C. $y = 2x - 4$.

D. $y = 2x - 5$.

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Đạo hàm: $y' = 3x^2 - 4x + 3$.

$$y'(-1) = 10; y(-1) = -6$$

Phương trình tiếp tuyến cần tìm là (d) : $y = 10(x+1) - 6 = 10x + 4$.

Câu 11. Gọi (H) là đồ thị hàm số $y = \frac{x-1}{x}$. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị (H) tại các giao điểm của (H) với hai trục tọa độ là:

A. $y = x - 1$.

B. $\begin{cases} y = x - 1 \\ y = x + 1 \end{cases}$.

C. $y = -x + 1$.

D. $y = x + 1$.

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Đạo hàm: $y' = \frac{1}{x^2}$.

(H) cắt trục hoành tại điểm có hoành độ là $x = 1$ và không cắt trục tung.

$$y'(1) = 1$$

Phương trình tiếp tuyến cần tìm là $d : y = x - 1$.

Câu 12. Lập phương trình tiếp tuyến của đồ thị $(H) : y = \frac{x-1}{x+2}$ tại giao điểm của (H) và trục hoành:

- A. $y = \frac{1}{3}(x-1)$. B. $y = 3x$. C. $y = x-3$. D. $y = 3(x-1)$.

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$.

Đạo hàm: $y' = \frac{3}{(x+2)^2}$.

(H) cắt trục hoành tại điểm có hoành độ $x_0 = 1 \Rightarrow y'(1) = \frac{1}{3}; y(1) = 0$

Phương trình tiếp tuyến cần tìm là $d : y = \frac{1}{3}(x-1)$.

Câu 13. Gọi (P) là đồ thị hàm số $y = x^2 - x + 3$. Phương trình tiếp tuyến với (P) tại giao điểm của (P) và trục tung là

- A. $y = -x + 3$. B. $y = -x - 3$. C. $y = x - 3$. D. $y = -3x + 1$.

Hướng dẫn giải:

Chọn đáp án A.

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Giao điểm của (P) và trục tung là $M(0;3)$.

Đạo hàm: $y' = 2x - 1 \Rightarrow$ hệ số góc của tiếp tuyến tại $x = 0$ là -1 .

Phương trình tiếp tuyến tại $M(0;3)$ là $y = -x + 3$.

Câu 14. Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{4}{x-1}$ tại điểm có hoành độ $x_0 = -1$ có phương trình là:

- A. $y = -x + 2$. B. $y = x + 2$. C. $y = x - 1$. D. $y = -x - 3$.

Hướng dẫn giải:

Chọn đáp án D.

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Đạo hàm: $y' = -\frac{4}{(x-1)^2}$.

Tiếp tuyến tại $M(-1; -2)$ có hệ số góc là $k = -1$.

Phương trình của tiếp tuyến là $y = -x - 3$

Câu 15. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^4 + 2x^2 - 1$ tại điểm có tung độ tiếp điểm bằng 2 là:

- A. $y = 8x - 6, y = -8x - 6$. B. $y = 8x - 6, y = -8x + 6$.
C. $y = 8x - 8, y = -8x + 8$. D. $y = 40x - 57$.

Hướng dẫn giải:

Chọn đáp án A.

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Đạo hàm: $y' = 4x^3 + 4x$.

Tung độ tiếp điểm bằng 2 nên $2 = x^4 + 2x^2 - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$.

Tại $M(1;2)$. Phương trình tiếp tuyến là $y = 8x - 6$.

Tại $N(-1;2)$. Phương trình tiếp tuyến là $y = -8x - 6$.

Câu 16. Cho đồ thị $(H): y = \frac{x+2}{x-1}$ và điểm $A \in (H)$ có tung độ $y = 4$. Hãy lập phương trình tiếp tuyến của (H) tại điểm A .

A. $y = x - 2$.

B. $y = -3x - 11$.

C. $y = 3x + 11$.

D. $y = -3x + 10$.

Hướng dẫn giải:

Chọn đáp án D.

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Đạo hàm: $y' = -\frac{3}{(x-1)^2}$.

Tung độ của tiếp tuyến là $y = 4$ nên $4 = \frac{x+2}{x-1} \Leftrightarrow x = 2$.

Tại $M(2; 4)$.

Phương trình tiếp tuyến là $y = -3x + 10$.

Câu 17. Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 - 3x + 1}{2x - 1}$ tại giao điểm của đồ thị hàm số với trục tung có phương trình là:

A. $y = x - 1$.

B. $y = x + 1$.

C. $y = x$.

D. $y = -x$.

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Ta có: $y' = \frac{2x^2 - 2x + 1}{(2x - 1)^2}$.

Giao điểm M của đồ thị với trục tung: $x_0 = 0 \Rightarrow y_0 = -1$

Hệ số góc của tiếp tuyến tại M là: $k = y'(0) = 1$.

Phương trình tiếp tuyến tại điểm M là: $y = k(x - x_0) + y_0 \Leftrightarrow y = x - 1$.

Câu 18. Cho đường cong $(C): y = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1}$ và điểm $A \in (C)$ có hoành độ $x = 3$. Lập phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm A .

A. $y = \frac{3}{4}x + \frac{5}{4}$.

B. $y = 3x + 5$.

C. $y = \frac{3}{4}x - \frac{5}{4}$.

D. $y = \frac{1}{4}x + \frac{5}{4}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Ta có: $y' = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$. Tại điểm $A \in (C)$ có hoành độ: $x_0 = 3 \Rightarrow y_0 = \frac{7}{2}$

Hệ số góc của tiếp tuyến tại A là: $k = y'(3) = \frac{3}{4}$.

Phương trình tiếp tuyến tại điểm A là: $y = k(x - x_0) + y_0 \Leftrightarrow y = \frac{3}{4}x + \frac{5}{4}$.

Câu 19. Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{1}{\sqrt{2x}}$ tại điểm $A\left(\frac{1}{2}; 1\right)$ có phương trình là:

A. $2x + 2y = -3$.

B. $2x - 2y = -1$.

C. $2x + 2y = 3$.

D. $2x - 2y = 1$.

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

Ta có: $y' = -\frac{1}{2x\sqrt{2x}}$. Hệ số góc của tiếp tuyến tại A là: $k = y'\left(\frac{1}{2}\right) = -1$.

Phương trình tiếp tuyến tại điểm A là: $y = k(x - x_0) + y_0 \Leftrightarrow 2x + 2y = 3$.

Câu 20. Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $f(x) = x^3 - 2x^2 - 2$ tại điểm có hoành độ $x_0 = -2$ có phương trình là:

A. $y = 4x - 8$.

B. $y = 20x + 22$.

C. $y = 20x - 22$.

D. $y = 20x - 16$.

Hướng dẫn giải:

Chọn B.

Ta có: $f'(x) = 3x^2 - 4x$. Tại điểm A có hoành độ $x_0 = -2 \Rightarrow y_0 = f(x_0) = -18$

Hệ số góc của tiếp tuyến tại A là: $k = f'(-2) = 20$.

Phương trình tiếp tuyến tại điểm A là: $y = k(x - x_0) + y_0 \Leftrightarrow y = 20x + 22$.

Câu 21. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị $(C): y = 3x - 4x^3$ tại điểm có hoành độ $x_0 = 0$ là:

A. $y = 3x$.

B. $y = 0$.

C. $y = 3x - 2$.

D. $y = -12x$.

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Ta có: $y' = 3 - 12x^2$. Tại điểm $A \in (C)$ có hoành độ: $x_0 = 0 \Rightarrow y_0 = 0$

Hệ số góc của tiếp tuyến tại A là: $k = y'(0) = 3$.

Phương trình tiếp tuyến tại điểm A là: $y = k(x - x_0) + y_0 \Leftrightarrow y = 3x$.

Câu 22. Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 2$ có đồ thị hàm số (C) . Phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm có hoành độ là nghiệm của phương trình $y'' = 0$ là

A. $y = -x - \frac{7}{3}$

B. $y = -x + \frac{7}{3}$

C. $y = x - \frac{7}{3}$

D. $y = \frac{7}{3}x$

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Ta có $y' = x^2 + 2x$ và $y'' = 2x + 2$

Theo giả thiết x_0 là nghiệm của phương trình $y''(x_0) = 0 \Leftrightarrow 2x + 2 = 0 \Leftrightarrow x_0 = -1$

Phương trình tiếp tuyến tại điểm $A\left(-1; -\frac{4}{3}\right)$ là: $y = -x - \frac{7}{3}$

Câu 23. Gọi M là giao điểm của đồ thị hàm số $y = \frac{2x-1}{x-2}$ với trục tung. Phương trình tiếp tuyến với đồ thị hàm số trên tại điểm M là:

A. $y = \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}$

B. $y = -\frac{3}{4}x + \frac{1}{2}$

C. $y = \frac{3}{4}x + \frac{1}{2}$

D. $y = -\frac{3}{2}x - \frac{1}{2}$

Hướng dẫn giải:

Chọn B.

Vì M là giao điểm của đồ thị với trục $Oy \Rightarrow M\left(0; \frac{1}{2}\right)$

$$y' = \frac{-3}{(x-2)^2} \Rightarrow k = y'(0) = -\frac{3}{4}$$

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị tại điểm M là: $y = -\frac{3}{4}x + \frac{1}{2}$

Câu 24. Cho hàm số $y = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$ có đồ thị (C) . Phương trình tiếp tuyến của (C) tại giao điểm của (C) với trục tung là:

A. $y = 3x + 1$

B. $y = -8x + 1$

C. $y = 8x + 1$

D. $y = 3x - 1$

Hướng dẫn giải:

Chọn đáp án A.

Giao điểm của (C) với trục tung là $A(0;1) \Rightarrow y'(0) = 3$.

Câu 25. Hệ số góc của tiếp tuyến với đồ thị hàm số $y = \frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} - 1$ tại điểm có hoành độ $x_0 = -1$ là:

- A. -2 B. 0 C. 1 D. 2

Hướng dẫn giải:

Ta có $f'(-1) = -2$.

Chọn đáp án A.

Câu 26. Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + 1$. Tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm có hoành độ là nghiệm của phương trình $y'' = 0$ có phương trình:

- A. $y = x + \frac{11}{3}$. B. $y = -x - \frac{1}{3}$. C. $y = x + \frac{1}{3}$. D. $y = -x + \frac{11}{3}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn D.

$$y' = x^2 - 4x + 3$$

$$y'' = 2x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 2.$$

Gọi $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm $\Rightarrow M\left(2; \frac{5}{3}\right)$

Phương trình tiếp tuyến cần tìm là: $y = y'(2)(x-2) + \frac{5}{3} \Leftrightarrow y = -x + \frac{11}{3}$.

Câu 27. Phương trình tiếp tuyến của (C): $y = x^3$ tại điểm $M_0(-1; -1)$ là:

- A. $y = 3x - 2$. B. $y = 3x + 2$. C. $y = 3x + 3$. D. $y = -3x + 3$.

Hướng dẫn giải:

Chọn B.

$$+ y' = 3x^2 \Rightarrow y'(-1) = 3$$

+ PTTT của (C) tại điểm $M_0(-1; -1)$ là $y = 3(x+1) - 1 \Leftrightarrow y = 3x + 2$.

Câu 28. Phương trình tiếp tuyến của (C): $y = x^3$ tại điểm có hoành độ bằng 1 là:

- A. $y = 3x + 2$. B. $y = 3x - 2$. C. $y = 3x$. D. $y = 3x - 3$.

Hướng dẫn giải:

Chọn B.

$$+ y' = 3x^2 \Rightarrow y'(1) = 3.$$

$$+ x_0 = 1 \Rightarrow y_0 = y(1) = 1.$$

+PTTT của đồ thị (C) tại điểm có hoành độ bằng 1 là: $y = 3(x-1) + 1 \Leftrightarrow y = 3x - 2$.

Câu 29. Cho hàm số $y = f(x) = \frac{x^2}{8} + \frac{11}{2}$, có đồ thị (C). Phương trình tiếp tuyến của (C) tại M có hoành độ $x_0 = -2$ là:

- A. $y = \frac{1}{2}(x+2) + 7$. B. $y = -\frac{1}{2}(x-2) + 7$. C. $y = -\frac{1}{2}(x+2) + 6$. D.

$$y = -\frac{1}{2}(x+2) - 6.$$

Hướng dẫn giải:

Đáp án C

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm $M(x_0; y_0)$ có phương trình là: $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$

$$f'(x) = \frac{x}{4} \Rightarrow f'(-2) = -\frac{1}{2}; y_0 = 6$$

Vậy phương trình tiếp tuyến có dạng $y = -\frac{1}{2}(x+2) + 6$

Câu 30. Phương trình tiếp tuyến của đường cong $f(x) = \frac{x^2 + x - 1}{x - 1}$ tại điểm có hoành độ $x_0 = -1$ là:

- A. $y = \frac{3}{4}x - \frac{5}{4}$. B. $y = \frac{3}{4}x + \frac{5}{4}$. C. $y = \frac{4}{3}x - \frac{5}{4}$. D. $y = \frac{4}{3}x + \frac{5}{4}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn B

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm $M(x_0; y_0)$ có phương trình là: $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$

$$f'(x) = \left(\frac{x^2 + x - 1}{x - 1} \right)' = \frac{x^2 - 2x}{(x - 1)^2}, \quad f'(-1) = \frac{3}{4}; \quad y(-1) = \frac{1}{2}$$

Vậy phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại $x_0 = -1$ có dạng $y = \frac{3}{4}x + \frac{5}{4}$.

Câu 31. Cho hàm số $y = f(x) = x^2 + 5x + 4$, có đồ thị (C). Tại các giao điểm của (C) với trục Ox, tiếp tuyến của (C) có phương trình:

- A. $y = 3x + 3$ và $y = -3x - 12$. B. $y = 3x - 3$ và $y = -3x + 12$.
C. $y = -3x + 3$ và $y = 3x - 12$. D. $y = 2x + 3$ và $y = -2x - 12$.

Hướng dẫn giải:

Đáp án A.

Xét phương trình hoành độ giao điểm.

$$x^2 + 5x + 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = -4 \end{cases}$$

$$f'(x) = 2x + 5$$

TH1: $x_0 = -1; y_0 = 0; f'(-1) = 3$ PTTT có dạng : $y = 3x + 3$

TH2: $x_0 = -4; y_0 = 0; f'(-4) = -3$ PTTT có dạng : $y = -3x - 12$

Câu 32. Phương trình tiếp tuyến của đường cong $y = f(x) = \tan\left(\frac{\pi}{4} - 3x\right)$ tại điểm có hoành độ

$x_0 = \frac{\pi}{6}$ là:

- A. $y = -x + \frac{\pi}{6} + 6$. B. $y = -x - \frac{\pi}{6} - 6$. C. $y = -6x + \pi - 1$. D. $y = -x - \frac{\pi}{6} + 6$.

Hướng dẫn giải:

Chọn C

$$f'(x) = \frac{-3}{\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - 3x\right)};$$

$$x_0 = \frac{\pi}{6}; \quad y_0 = -1; \quad f'(x_0) = -6$$

Phương trình tiếp tuyến: $y = -6x + \pi - 1$.

Câu 33. Cho hàm số $y = 2x^3 - 3x^2 + 1$ có đồ thị (C), tiếp tuyến với (C) nhận điểm $M_0\left(\frac{3}{2}; y_0\right)$ làm tiếp điểm có phương trình là:

- A. $y = \frac{9}{2}x$. B. $y = \frac{9}{2}x - \frac{27}{4}$. C. $y = \frac{9}{2}x - \frac{23}{4}$. D. $y = \frac{9x}{2} - \frac{31}{4}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn đáp án C.

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Ta có $x_0 = \frac{3}{2} \Rightarrow y_0 = 1$.

Đạo hàm của hàm số $y' = 6x^2 - 6x$.

Suy ra hệ số góc của tiếp tuyến tại $M_0\left(\frac{3}{2}; y_0\right)$ là $k = \frac{9}{2}$.

Phương trình của tiếp tuyến là $y = \frac{9}{2}x - \frac{23}{4}$

Câu 34. Cho hàm số $y = x^3 + 3x^2 - 6x + 1$ (C). Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) biết hoành độ tiếp điểm bằng 1

A. $y = 3x - 6$

B. $y = 3x - 7$

C. $y = 3x - 4$

D. $y = 3x - 5$

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

Gọi $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm

Ta có: $y' = 3x^2 + 6x - 6$.

Ta có: $x_0 = 1 \Rightarrow y_0 = -1, y'(1) = 3$

Phương trình tiếp tuyến là: $y = y'(x_0)(x - x_0) + y_0 = 3(x - 1) - 1 = 3x - 4$

Câu 35. Cho hàm số $y = x^3 + 3x^2 - 6x + 1$ (C). Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) biết tung độ tiếp điểm bằng 9

A. $\begin{cases} y = 18x + 81 \\ y = -9x \\ y = 18x - 27 \end{cases}$

B. $\begin{cases} y = x + 81 \\ y = 9x \\ y = 9x - 2 \end{cases}$

C. $\begin{cases} y = 18x + 1 \\ y = -9x \\ y = 9x - 7 \end{cases}$

D. $\begin{cases} y = x + 81 \\ y = -9x \\ y = 9x - 2 \end{cases}$

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Gọi $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm

Ta có: $y' = 3x^2 + 6x - 6$.

Ta có: $y_0 = 9 \Leftrightarrow x_0^3 + 3x_0^2 - 6x_0 - 8 = 0 \Leftrightarrow x_0 = -1, x_0 = 2, x_0 = -4$.

• $x_0 = -4 \Rightarrow y'(x_0) = 18$. Phương trình tiếp tuyến là: $y = 18(x + 4) + 9 = 18x + 81$

• $x_0 = -1 \Rightarrow y'(x_0) = -9$. Phương trình tiếp tuyến là: $y = -9(x + 1) + 9 = -9x$

• $x_0 = 2 \Rightarrow y'(x_0) = 18$. Phương trình tiếp tuyến là: $y = 18(x - 2) + 9 = 18x - 27$.

Câu 36. Cho hàm số $y = x^3 - 3x + 1$ (C). Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C), biết hoành độ tiếp điểm bằng 0

A. $y = -3x + 12$

B. $y = -3x + 11$

C. $y = -3x + 1$

D. $y = -3x + 2$

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

Ta có: $y' = 3x^2 - 3$. Gọi $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm

Ta có: $x_0 = 0 \Rightarrow y_0 = 1, y'(x_0) = -3$

Phương trình tiếp tuyến: $y = -3x + 1$.

Câu 37. Cho hàm số $y = x^3 - 3x + 1$ (C). Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C), biết tung độ tiếp điểm bằng 3

A. $y = 9x - 1$ hay $y = 3$

B. $y = 9x - 4$ hay $y = 3$

C. $y = 9x - 3$ hay $y = 3$

D. $y = 9x - 13$ hay $y = 3$

Hướng dẫn giải:

Chọn D.

Ta có: $y' = 3x^2 - 3$. Gọi $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm

Ta có: $y_0 = 3 \Leftrightarrow x_0^3 - 3x_0 - 2 = 0 \Leftrightarrow x_0 = 2, x_0 = -1$

• $x_0 = -1 \Rightarrow y'(x_0) = 0$. Phương trình tiếp tuyến: $y = 3$

- $x_0 = 2 \Rightarrow y'(x_0) = 9$. Phương trình tiếp tuyến:

$$y = 9(x - 2) + 3 = 9x - 13.$$

Câu 38. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số: $y = 2x^4 - 4x^2 + 1$ biết tung độ tiếp điểm bằng 1

A. $\begin{cases} y = 1 \\ y = 8\sqrt{2}x - 5 \\ y = -8\sqrt{2}x - 5 \end{cases}$
B. $\begin{cases} y = 1 \\ y = 8\sqrt{2}x - 15 \\ y = -8\sqrt{2}x - 15 \end{cases}$
C. $\begin{cases} y = 1 \\ y = 8\sqrt{2}x - 1 \\ y = -8\sqrt{2}x - 1 \end{cases}$
D. $\begin{cases} y = 1 \\ y = 8\sqrt{2}x - 10 \\ y = -8\sqrt{2}x - 10 \end{cases}$

Hướng dẫn giải:

Chọn B.

Ta có: $y' = 8x^3 - 8x$

Gọi $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm.

Ta có: $y_0 = 1 \Leftrightarrow 2x_0^4 - 4x_0^2 = 0 \Leftrightarrow x_0 = 0, x_0 = \pm\sqrt{2}$

- $x_0 = 0 \Rightarrow y'(x_0) = 0$. Phương trình tiếp tuyến là: $y = 1$

- $x_0 = \sqrt{2} \Rightarrow y'(x_0) = 8\sqrt{2}$. Phương trình tiếp tuyến

$$y = 8\sqrt{2}(x - \sqrt{2}) + 1 = 8\sqrt{2}x - 15$$

- $x_0 = -\sqrt{2} \Rightarrow y'(x_0) = -8\sqrt{2}$. Phương trình tiếp tuyến

$$y = -8\sqrt{2}(x + \sqrt{2}) + 1 = -8\sqrt{2}x - 15.$$

Câu 39. Cho hàm số $y = x^4 + x^2 + 1$ (C). Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C), biết tung độ tiếp điểm bằng 1

A. $y = 2$
B. $y = 1$
C. $y = 3$
D. $y = 4$

Hướng dẫn giải:

Chọn B.

Ta có: $y' = 4x^3 + 2x$. Gọi $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm

Ta có $y_0 = 1 \Leftrightarrow x_0^4 + x_0^2 = 0 \Leftrightarrow x_0 = 0, y'(x_0) = 0$

Phương trình tiếp tuyến: $y = 1$

Câu 40. Cho hàm số $y = \frac{2x+2}{x-1}$ (C). Viết phương trình tiếp tuyến của (C), biết tung độ tiếp điểm bằng -2.

A. $\begin{cases} y = -x + 7 \\ y = -x - 1 \end{cases}$
B. $\begin{cases} y = -x + 7 \\ y = -x - 21 \end{cases}$
C. $\begin{cases} y = -x + 27 \\ y = -x - 21 \end{cases}$
D. $\begin{cases} y = -x + 27 \\ y = -x - 1 \end{cases}$

$$\Delta: y = \frac{-4}{(x_0 - 1)^2}(x - x_0) + \frac{2x_0 + 2}{x_0 - 1}.$$

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Hàm số xác định với mọi $x \neq 1$. Ta có: $y' = \frac{-4}{(x-1)^2}$

Gọi $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm, suy ra phương trình tiếp tuyến của (C):

Vì tiếp tuyến có hệ số góc bằng -1 nên ta có

$$-\frac{4}{(x_0 - 1)^2} = -1 \Leftrightarrow x_0 = 3, x_0 = -1$$

- $x_0 = 2 \Rightarrow y_0 = 4 \Rightarrow \Delta: y = -x + 7$

- $x_0 = -1 \Rightarrow y_0 = 0 \Rightarrow \Delta: y = -x - 1$

Câu 41. Cho hàm số $y = \frac{ax+b}{x-2}$, có đồ thị là (C). Tìm a, b biết tiếp tuyến của đồ thị (C) tại giao điểm của (C) và trục Ox có phương trình là $y = -\frac{1}{2}x + 2$

- A.** $a = -1, b = 1$ **B.** $a = -1, b = 2$ **C.** $a = -1, b = 3$ **D.** $a = -1, b = 4$

Hướng dẫn giải:

Chọn D.

Giao điểm của tiếp tuyến d: $y = -\frac{1}{2}x + 2$ với trục Ox là $A(4;0)$, hệ số góc của d : $k = -\frac{1}{2}$ và

$$A(4;0) \in (C) \Leftrightarrow \frac{4a+b}{2} = 0 \Leftrightarrow 4a+b = 0.$$

$$\text{Ta có: } y' = \frac{-2a-b}{(x-2)^2} \Rightarrow y'(4) = \frac{-2a-b}{4}$$

$$\text{Theo bài toán thì: } k = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow y'(4) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{-2a-b}{4} = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow 2a+b = 2$$

$$\text{Giải hệ } \begin{cases} 4a+b=0 \\ 2a+b=2 \end{cases} \text{ ta được } a = -1, b = 4$$

Câu 42. Cho hàm số $y = x^3 - 3x + 1$ có đồ thị là (C). Giả sử (d) là tiếp tuyến của (C) tại điểm có hoành độ $x = 2$, đồng thời (d) cắt đồ thị (C) tại N, tìm tọa độ N.

- A.** $N(1;-1)$ **B.** $N(2;3)$ **C.** $N(-4;-51)$ **D.** $N(3;19)$

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

Tiếp tuyến (d) tại điểm M của đồ thị (C) có hoành độ $x_0 = 2 \Rightarrow y_0 = 3$

$$\text{Ta có } y'(x) = 3x^2 - 3 \Rightarrow y'(x_0) = y'(2) = 9$$

Phương trình tiếp tuyến (d) tại điểm M của đồ thị (C) là

$$y = y'(x_0)(x - x_0) + y_0 \Rightarrow y = 9(x - 2) + 3 \Rightarrow y = 9x - 15$$

$$\text{Xét phương trình } x^3 - 3x + 1 = 9x - 15 \Leftrightarrow x^3 - 12x + 16 = 0 \Leftrightarrow (x - 2)(x^2 + 2x - 8) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -4 \text{ hoặc } x = 2 \text{ (không thỏa)}$$

Vậy $N(-4;-51)$ là điểm cần tìm

Câu 43. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3 - 6x^2 + 11x - 1$ tại điểm có tung độ bằng 5.

- A.** $y = 2x + 1$; $y = -x + 2$; $y = 2x - 1$
B. $y = 2x + 3$; $y = -x + 7$; $y = 2x - 2$
C. $y = 2x + 1$; $y = -x + 2$; $y = 2x - 2$
D. $y = 2x + 3$; $y = -x + 7$; $y = 2x - 1$

Hướng dẫn giải:

Chọn D.

$$\text{Ta có: } y = 5 \Leftrightarrow x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = 1; x = 2; x = 3$$

Phương trình các tiếp tuyến: $y = 2x + 3$; $y = -x + 7$; $y = 2x - 1$

Câu 44. Cho hàm số $y = \frac{2x+m+1}{x-1}$ (C_m). Tìm m để tiếp tuyến của (C_m) tại điểm có hoành độ $x_0 = 2$

tạo với hai trục tọa độ một tam giác có diện tích bằng $\frac{25}{2}$.

- A.** $\begin{cases} m = -2; m = -\frac{23}{9} \\ m = -7; m = -\frac{28}{9} \end{cases}$ **B.** $\begin{cases} m = 2; m = \frac{23}{9} \\ m = -7; m = -\frac{28}{9} \end{cases}$ **C.** $\begin{cases} m = -2; m = -\frac{23}{9} \\ m = 7; m = \frac{28}{9} \end{cases}$ **D.** $\begin{cases} m = 2; m = -\frac{23}{9} \\ m = -7; m = \frac{28}{9} \end{cases}$

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Ta có: $y' = \frac{-m-3}{(x-1)^2}$

Ta có $x_0 = 2 \Rightarrow y_0 = m+5, y'(x_0) = -m-3$. Phương trình tiếp tuyến Δ của (C_m) tại điểm có hoành độ $x_0 = 2$ là:

$$y = (-m-3)(x-2) + m+5 = (-m-3)x + 3m+11.$$

- $\Delta \cap Ox = A \Rightarrow A\left(\frac{3m+11}{m+3}; 0\right)$, với $m+3 \neq 0$
- $\Delta \cap Oy = B \Rightarrow B(0; 3m+11)$

Suy ra diện tích tam giác OAB là: $S = \frac{1}{2}OA \cdot OB = \frac{1}{2} \frac{(3m+11)^2}{|m+3|}$

Theo giả thiết bài toán ta suy ra: $\frac{1}{2} \frac{(3m+11)^2}{|m+3|} = \frac{25}{2}$

$$\Leftrightarrow (3m+11)^2 = 25|m+3| \Leftrightarrow \begin{cases} 9m^2 + 66m + 121 = 25m + 75 \\ 9m^2 + 66m + 121 = -25m - 75 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 9m^2 + 41m + 46 = 0 \\ 9m^2 + 91m + 196 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -2; m = -\frac{23}{9} \\ m = -7; m = -\frac{28}{9} \end{cases}$$

Câu 45. Giả sử tiếp tuyến của ba đồ thị $y = f(x), y = g(x), y = \frac{f(x)}{g(x)}$ tại điểm của hoành độ $x = 0$ bằng nhau. Khẳng định nào sau đây là đúng nhất.

- A.** $f(0) < \frac{1}{4}$ **B.** $f(0) \leq \frac{1}{4}$ **C.** $f(0) > \frac{1}{4}$ **D.** $f(0) \geq \frac{1}{4}$

Hướng dẫn giải:

Chọn B.

Theo giả thiết ta có: $f'(0) = g'(0) = \frac{f'(0) \cdot g(0) - g'(0) f(0)}{g^2(0)}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f'(0) = g'(0) \\ 1 = \frac{g(0) - f(0)}{g^2(0)} \Rightarrow f(0) = g(0) - g^2(0) = \frac{1}{4} - \left(g(0) - \frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{1}{4} \end{cases}$$

Câu 46. Tìm trên $(C) : y = 2x^3 - 3x^2 + 1$ những điểm M sao cho tiếp tuyến của (C) tại M cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 8.

- A.** $M(-1; -4)$ **B.** $M(-2; -27)$ **C.** $M(1; 0)$ **D.** $M(2; 5)$

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Giả sử $M(x_0; y_0) \in (C) \Rightarrow y_0 = 2x_0^3 - 3x_0^2 + 1$. Ta có: $y' = 3x^2 - 6x$.

Phương trình tiếp tuyến Δ tại M: $y = (6x_0^2 - 6x_0)(x - x_0) + 2x_0^3 - 3x_0^2 + 1$.

Δ đi qua $P(0; 8) \Leftrightarrow 8 = -4x_0^3 + 3x_0^2 + 1 \Leftrightarrow x_0 = -1$. Vậy $M(-1; -4)$.

Câu 47. Phương trình tiếp tuyến của đường cong $f(x) = \frac{x}{x+2}$ tại điểm $M(-1; -1)$ là:

- A.** $y = -2x - 1$. **B.** $y = -2x + 1$. **C.** $y = 2x + 1$. **D.** $y = 2x - 1$.

Hướng dẫn giải:

Chọn C

$$f'(x) = \frac{2}{(x+2)^2}$$

Ta có $x_0 = -1; y_0 = -1; f'(x_0) = 2$

Phương trình tiếp tuyến $y = 2x + 1$.

Câu 48. Tiếp tuyến của parabol $y = 4 - x^2$ tại điểm $(1; 3)$ tạo với hai trục tọa độ một tam giác vuông. Diện tích của tam giác vuông đó là:

- A. $\frac{25}{2}$. B. $\frac{5}{4}$. C. $\frac{5}{2}$. D. $\frac{25}{4}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn D.

+ $y' = -2x \Rightarrow y'(1) = -2$.

+PTTT tại điểm có tọa độ $(1; 3)$ là: $y = -2(x-1) + 3 \Leftrightarrow y = -2x + 5$ (d).

+ Ta có (d) giao Ox tại $A\left(\frac{5}{2}; 0\right)$, giao Oy tại $B(0; 5)$ khi đó (d) tạo với hai trục tọa độ tam giác vuông OAB vuông tại O.

Diện tích tam giác vuông OAB là: $S = \frac{1}{2}OA \cdot OB = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot 5 = \frac{25}{4}$.

Câu 49. Trên đồ thị của hàm số $y = \frac{1}{x-1}$ có điểm M sao cho tiếp tuyến tại đó cùng với các trục tọa độ tạo thành một tam giác có diện tích bằng 2. Tọa độ M là:

- A. $(2; 1)$. B. $\left(4; \frac{1}{3}\right)$. C. $\left(-\frac{3}{4}; -\frac{4}{7}\right)$. D. $\left(\frac{3}{4}; -4\right)$.

Hướng dẫn giải:

Chọn D.

Ta có: $y' = -\frac{1}{(x-1)^2}$. Lấy điểm $M(x_0; y_0) \in (C)$.

Phương trình tiếp tuyến tại điểm M là: $y = -\frac{1}{(x_0-1)^2} \cdot (x-x_0) + \frac{1}{x_0-1}$ (Δ).

Giao với trục hoành: $(\Delta) \cap Ox = A(2x_0 - 1; 0)$.

Giao với trục tung: $(\Delta) \cap Oy = B\left(0; \frac{2x_0 - 1}{(x_0 - 1)^2}\right)$

$S_{OAB} = \frac{1}{2}OA \cdot OB \Leftrightarrow 4 = \left(\frac{2x_0 - 1}{x_0 - 1}\right)^2 \Leftrightarrow x_0 = \frac{3}{4}$. Vậy $M\left(\frac{3}{4}; -4\right)$.

Câu 50. Cho hàm số $y = f(x) = -x^2 + 5$, có đồ thị (C). Phương trình tiếp tuyến của (C) tại M có tung độ $y_0 = -1$ với hoành độ $x_0 < 0$ là

- A. $y = 2\sqrt{6}(x + \sqrt{6}) - 1$. B. $y = -2\sqrt{6}(x + 6) - 1$.
C. $y = 2\sqrt{6}(x - 6) + 1$. D. $y = 2\sqrt{6}(x - \sqrt{6}) - 1$.

Hướng dẫn giải:

Chọn A

$f'(x) = -2x$

Do $x_0 < 0$ nên $x_0 = -\sqrt{6}; f'(x_0) = 2\sqrt{6}$.

Phương trình tiếp tuyến: $y = 2\sqrt{6}(x + \sqrt{6}) - 1$.

Câu 51. Cho hàm số $y = x^4 - 8x^2 + m + 1$ (C_m). Giả sử rằng tiếp tuyến của đồ thị (C_m) tại điểm có hoành độ $x_0 = 1$ luôn cắt đồ thị (C_m) tại ba điểm phân biệt. Tìm tọa độ các giao điểm.

A. $A(1; m-6), B(-1 \pm \sqrt{3}; m+18 \pm \sqrt{3})$

B. $A(1; m-6), B(-1 \pm \sqrt{7}; m+18 \mp \sqrt{7})$

C. $A(1; m-6), B(-1 \pm \sqrt{2}; m+18 \pm \sqrt{2})$

D. $A(1; m-6), B(-1 \pm \sqrt{6}; m+18 \mp \sqrt{6})$

Hướng dẫn giải:

Chọn D.

Ta có: $y' = 4x^3 - 16x$

Vì $x_0 = 1 \Rightarrow y_0 = m-6, y'(x_0) = -12$. Phương trình tiếp tuyến d của (C_m) tại điểm có hoành độ $x_0 = 1$ là: $y = -12(x-1) + m-6 = -12x + m + 6$.

Phương trình hoành độ giao điểm của (C_m) với d

$$x^4 - 8x^2 + m + 1 = -12x + m + 6 \Leftrightarrow x^4 - 8x^2 + 12x - 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2(x^2 + 2x - 5) = 0 \Leftrightarrow x = 1, x = -1 \pm \sqrt{6}$$

Vậy d và (C_m) luôn cắt nhau tại ba điểm phân biệt

$$A(1; m-6), B(-1 \pm \sqrt{6}; m+18 \mp \sqrt{6})$$

Câu 52. Cho hàm số $y = \frac{2x+m+1}{x-1}$ (C_m). Tìm m để tiếp tuyến của (C_m) tại điểm có hoành độ $x_0 = 0$

đi qua $A(4; 3)$

A. $m = -\frac{16}{5}$

B. $m = -\frac{6}{5}$

C. $m = -\frac{1}{5}$

D. $m = -\frac{16}{15}$

Hướng dẫn giải:

Chọn D.

Ta có: $y' = \frac{-m-3}{(x-1)^2}$

Vì $x_0 = 0 \Rightarrow y_0 = -m-1, y'(x_0) = -m-3$. Phương trình tiếp tuyến d của (C_m) tại điểm có hoành độ $x_0 = 0$ là:

$$y = (-m-3)x - m - 1$$

Tiếp tuyến đi qua A khi và chỉ khi: $3 = (-m-3)4 - m - 1 \Leftrightarrow m = -\frac{16}{5}$.

Câu 53. Cho hàm số $y = x^4 + 2x^2 - 3$. Tìm phương trình tiếp tuyến của hàm số có khoảng cách đến điểm $M(0; -3)$ bằng $\frac{5}{\sqrt{65}}$.

A. $y = 2x + 1$

B. $y = 3x - 2$

C. $y = 7x + 6$

D. Đáp án khác

Hướng dẫn giải:

Gọi $A \in (C) \Rightarrow A(a; a^4 + 2a^2 - 3)$

Ta có: $y' = 4x^3 + 4x \Rightarrow y'(a) = 4a^3 + 4a$

Phương trình tiếp tuyến (t): $(4a^3 + 4a)x - y - 3a^4 - 2a^2 - 3 = 0$

$$d(M; (t)) = \frac{5}{\sqrt{65}} \text{ hay } \frac{3a^4 + 2a^2}{\sqrt{(4a^3 + 4a)^2 + 1}} = \frac{5}{\sqrt{65}} \text{ hay}$$

$$5(a-1)(a+1)(117a^6 + 193a^4 + 85a^2 + 5) = 0$$

Giải tìm a, sau đó thế vào phương trình (t) suy ra các phương trình tiếp tuyến cần tìm.

Câu 54. Cho hàm số $y = \frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} + 2$ có đồ thị (C). Viết phương trình tiếp tuyến (d) của (C) biết

khoảng cách từ điểm $A(0; 3)$ đến (d) bằng $\frac{9}{4\sqrt{5}}$.

A. $y = 2x + \frac{1}{4}, y = -2x + \frac{3}{4}$

B. $y = 2x + \frac{3}{4}, y = -2x + \frac{3}{14}$

$$C. y = 2x + \frac{3}{4}, y = -2x + \frac{3}{4}$$

$$D. y = 2x + \frac{3}{14}, y = -2x + \frac{3}{4}$$

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

Phương trình tiếp tuyến (d) có dạng : $y = y'(x_0)(x - x_0) + y(x_0)$

(trong đó x_0 là hoành độ tiếp điểm của (d) với (C)).

$$\text{Phương trình (d): } y = (x_0^3 + x_0)(x - x_0) + \frac{x_0^4}{4} + \frac{x_0^2}{2} + 2 = (x_0^3 + x_0)x - \frac{3}{4}x_0^4 - \frac{1}{2}x_0^2 + 2$$

$$\Leftrightarrow (x_0^3 + x_0)x - y - \frac{3}{4}x_0^4 - \frac{1}{2}x_0^2 + 2 = 0.$$

$$d(A; (d)) = \frac{9}{4\sqrt{5}} \Leftrightarrow \frac{\left| -\frac{3}{4}x_0^4 - \frac{1}{2}x_0^2 - 1 \right|}{\sqrt{(x_0^3 + x_0)^2 + 1}} = \frac{9}{4\sqrt{5}}$$

$$\Leftrightarrow \left| 3x_0^4 + 2x_0^2 + 4 \right| \sqrt{5} = 9\sqrt{x_0^2(x_0^2 + 1)^2 + 1} \Leftrightarrow 5(3x_0^4 + 2x_0^2 + 4)^2 = 81[x_0^2(x_0^2 + 1)^2 + 1]$$

$$\text{Đặt } t = x_0^2, t \geq 0. \text{ Phương trình (1) trở thành: } 5(3t^2 + 2t + 4)^2 = 81[t(t+1)^2 + 1]$$

$$\Leftrightarrow 5(9t^4 + 4t^2 + 16 + 12t^3 + 24t^2 + 16t) = 81t^3 + 162t^2 + 81t + 81$$

$$\Leftrightarrow 45t^4 - 21t^3 - 22t^2 - t - 1 = 0 \Leftrightarrow (t-1)(45t^3 + 24t^2 + 2t + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow t = 1 \quad (\text{do } t \geq 0 \text{ nên } 45t^3 + 24t^2 + 2t + 1 > 0)$$

$$\text{Với } t = 1, \text{ ta có } x_0^2 = 1 \Leftrightarrow x_0 = \pm 1.$$

$$\text{Suy ra phương trình tiếp tuyến (d): } y = 2x + \frac{3}{4}, y = -2x + \frac{3}{4}$$

Câu 55. Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ ($a \neq 0$), có đồ thị là (C). Tìm a, b, c biết (C) có ba điểm cực trị, điểm cực tiểu của (C) có tọa độ là (0;3) và tiếp tuyến d của (C) tại giao điểm của (C) với trục Ox có phương trình là $y = -8\sqrt{3}x + 24$.

$$A. a = -1, b = 2, c = 3$$

$$B. a = 1, b = 21, c = 3$$

$$C. a = -1, b = 21, c = 13$$

$$D. a = -12, b = 22, c = 3$$

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

$$(C) \text{ có ba điểm cực trị, điểm cực tiểu của (C) có tọa độ là } (0;3) \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0, b > 0 \\ c = 3 \end{cases}$$

Giao điểm của tiếp tuyến d và trục Ox là $B(\sqrt{3};0)$ và hệ số góc của d là $-8\sqrt{3}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} B \in (C) \\ y'(\sqrt{3}) = -8\sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9a + 3b + c = 0 \\ 4a(\sqrt{3})^3 + 2b\sqrt{3} = -8\sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9a + 3b + c = 0 \\ 6a + b = -4 \end{cases}$$

$$\text{Giải hệ } \begin{cases} c = 3 \\ 9a + 3b + c = 0 \\ 6a + b = -4 \end{cases} \text{ ta được } a = -1, b = 2, c = 3 \Rightarrow y = -x^4 + 2x^2 + 3$$

Câu 56. Cho hàm số: $y = \frac{2x+2}{x-1}$ có đồ thị (C). Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) biết tiếp tuyến tạo với 2 trục tọa độ lập thành một tam giác cân.

$$A. y = -x - 1, y = -x + 6.$$

$$B. y = -x - 2, y = -x + 7.$$

$$C. y = -x - 1, y = -x + 5.$$

$$D. y = -x - 1, y = -x + 7.$$

Hướng dẫn giải:

Chọn D.

Hàm số đã cho xác định với $\forall x \neq 1$. Ta có: $y' = \frac{-4}{(x-1)^2}$

Gọi $M(x_0; y_0)$ là tọa độ tiếp điểm, suy ra phương trình tiếp tuyến của (C) :

$$y = \frac{-4}{(x_0-1)^2}(x-x_0) + \frac{2x_0+2}{x_0-1} \text{ với } y'(x_0) = \frac{-4}{(x_0-1)^2} \text{ và } y_0 = \frac{2x_0+2}{x_0-1}$$

Tiếp tuyến tạo với 2 trục tọa độ lập thành một tam giác cân nên hệ số góc của tiếp tuyến bằng ± 1 . Mặt khác: $y'(x_0) < 0$, nên có: $y'(x_0) = -1$

$$\text{Tức } \frac{-4}{(x_0-1)^2} = -1 \Leftrightarrow x_0 = -1 \text{ hoặc } x_0 = 3.$$

$$* \text{ Với } x_0 = -1 \Rightarrow y_0 = 0 \Rightarrow \Delta: y = -x - 1$$

$$* \text{ Với } x_0 = 3 \Rightarrow y_0 = 4 \Rightarrow \Delta: y = -x + 7$$

Vậy, có 2 tiếp tuyến thỏa mãn đề bài: $y = -x - 1$, $y = -x + 7$.

Câu 57. Cho hàm số: $y = \frac{2x+2}{x-1}$ có đồ thị (C) . Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) biết tiếp tuyến tại điểm thuộc đồ thị có khoảng cách đến trục Oy bằng 2.

$$\text{A. } y = -\frac{4}{9}x - \frac{1}{9}, y = 4x + 14.$$

$$\text{B. } y = -\frac{4}{9}x - \frac{2}{9}, y = 4x + 1.$$

$$\text{C. } y = -\frac{4}{9}x - \frac{1}{9}, y = 4x + 1.$$

$$\text{D. } y = -\frac{4}{9}x - \frac{2}{9}, y = 4x + 14.$$

Hướng dẫn giải:

Chọn D.

Hàm số đã cho xác định với $\forall x \neq 1$. Ta có: $y' = \frac{-4}{(x-1)^2}$

Gọi $M(x_0; y_0)$ là tọa độ tiếp điểm, suy ra phương trình tiếp tuyến của (C) :

$$y = \frac{-4}{(x_0-1)^2}(x-x_0) + \frac{2x_0+2}{x_0-1} \text{ với } y'(x_0) = \frac{-4}{(x_0-1)^2} \text{ và } y_0 = \frac{2x_0+2}{x_0-1}$$

Khoảng cách từ $M(x_0; y_0)$ đến trục Oy bằng 2 suy ra $x_0 = \pm 2$, hay $M\left(-2; \frac{2}{3}\right)$, $M(2; 6)$.

$$\text{Phương trình tiếp tuyến tại } M\left(-2; \frac{2}{3}\right) \text{ là: } y = -\frac{4}{9}x - \frac{2}{9}$$

$$\text{Phương trình tiếp tuyến tại } M(2; 6) \text{ là: } y = 4x + 14$$

$$\text{Vậy, có 2 tiếp tuyến thỏa đề bài: } y = -\frac{4}{9}x - \frac{2}{9}, y = 4x + 14.$$

Câu 58. Tìm m để đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 + 2mx + 2m^2 - 1}{x-1}$ cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt và các tiếp tuyến với (C_m) tại hai điểm này vuông góc với nhau.

$$\text{A. } m = \frac{2}{3}$$

$$\text{B. } m = -1$$

$$\text{C. } m = \frac{2}{3}, m = -1$$

$$\text{D. } m = 0$$

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Hàm số đã cho xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Xét phương trình hoành độ giao điểm của (C_m) và trục hoành:

$$\frac{x^2 + 2mx + 2m^2 - 1}{x-1} = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2mx + 2m^2 - 1 = 0, (x \neq 1) \quad (1)$$

Đề (C_m) cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt A, B thì phương trình (1) phải có hai nghiệm phân biệt

$$\text{khác 1. Tức là ta phải có: } \begin{cases} \Delta' = m^2 - 2m^2 + 1 > 0 \\ 1 + 2m + 2m^2 - 1 \neq 0 \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} (1-m)(1+m) > 0 \\ 2m(m+1) \neq 0 \end{cases} \text{ tức } \begin{cases} -1 < m < 1 \\ m \neq 0 \end{cases} \quad (2).$$

Gọi $x_1; x_2$ là hai nghiệm của (1). Theo định lý Vi - ét, ta có: $x_1 + x_2 = -2m$, $x_1 \cdot x_2 = 2m^2 - 1$

Giả sử $I(x_0; 0)$ là giao điểm của (C_m) và trục hoành. Tiếp tuyến của (C_m) tại điểm I có hệ số góc

$$y'(x_0) = \frac{(2x_0 + 2m)(x_0 - 1) - (x_0^2 + 2mx_0 + 2m^2 - 1)}{(x_0 - 1)^2} = \frac{2x_0 + 2m}{x_0 - 1}$$

Như vậy, tiếp tuyến tại A, B lần lượt có hệ số góc là $y'(x_1) = \frac{2x_1 + 2m}{x_1 - 1}$, $y'(x_2) = \frac{2x_2 + 2m}{x_2 - 1}$.

Tiếp tuyến tại A, B vuông góc nhau khi và chỉ khi $y'(x_1)y'(x_2) = -1$ hay

$$\left(\frac{2x_1 + 2m}{x_1 - 1} \right) \left(\frac{2x_2 + 2m}{x_2 - 1} \right) = -1 \Leftrightarrow 5x_1 \cdot x_2 + (4m - 1)(x_1 + x_2) + 4m^2 + 1 = 0 \text{ tức } 3m^2 + m - 2 = 0 \Leftrightarrow m = -1$$

hoặc $m = \frac{2}{3}$. Đối chiếu điều kiện chỉ có $m = \frac{2}{3}$ thỏa mãn.

DẠNG 2: TIẾP TUYẾN CÓ HỆ SỐ GÓC K CHO TRƯỚC

Câu 1. Hệ số góc của tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{2-3x}{x-1}$ tại giao điểm của đồ thị hàm số với trục hoành bằng :

- A. 9. B. $\frac{1}{9}$. C. -9. D. $-\frac{1}{9}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Đạo hàm: $y' = \frac{1}{(x-1)^2}$.

Đồ thị hàm số cắt trục hoành tại $A\left(\frac{2}{3}; 0\right)$.

Hệ số góc của tiếp tuyến là $y'\left(\frac{2}{3}\right) = 9$.

Câu 2. Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{x^3}{3} + 3x^2 - 2$ có hệ số góc $k = -9$, có phương trình là :

- A. $y - 16 = -9(x + 3)$. B. $y = -9(x + 3)$. C. $y - 16 = -9(x - 3)$. D. $y + 16 = -9(x + 3)$.

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Đạo hàm: $y' = x^2 + 6x$.

$k = -9 \Leftrightarrow y'(x_0) = -9 \Leftrightarrow x_0^2 + 6x_0 = -9 \Leftrightarrow (x_0 + 3)^2 = 0 \Leftrightarrow x_0 = -3 \Rightarrow y_0 = 16$

Phương trình tiếp tuyến cần tìm là $(d): y = -9(x + 3) + 16 \Leftrightarrow y - 16 = -9(x + 3)$.

Câu 3. Hệ số góc của tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{x-1}{x+1}$ tại giao điểm với trục tung bằng :

- A. -2. B. 2. C. 1. D. -1.

Hướng dẫn giải:

Chọn B.

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

Đạo hàm: $y' = \frac{2}{(x+1)^2}$.

Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có $x_0 = 0 \Rightarrow y'_0 = 2$.

Câu 4. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2$ có đồ thị (C) . Có bao nhiêu tiếp tuyến của (C) song song đường thẳng $y = 9x + 10$?

- A. 1. B. 3. C. 2. D. 4.

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Đạo hàm: $y' = 3x^2 - 6x$.

$k = 9 \Rightarrow 3x_0^2 - 6x_0 - 9 = 0 \Leftrightarrow x_0^2 - 2x_0 - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 3 \\ x_0 = -1 \end{cases}$

Vậy có 2 tiếp tuyến thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 5. Gọi (C) là đồ thị của hàm số $y = x^4 + x$. Tiếp tuyến của (C) vuông góc với đường thẳng $d: x + 5y = 0$ có phương trình là:

- A. $y = 5x - 3$. B. $y = 3x - 5$. C. $y = 2x - 3$. D. $y = x + 4$.

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Ta có : $y' = 4x^3 + 1$

Vì tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $y = -\frac{1}{5}x$ nên tiếp tuyến có hệ số góc $y'(x_0) = 4x_0^3 + 1 = 5$

$$\Rightarrow x_0 = 1 \quad (y_0 = 2)$$

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại $M(1; 2)$ có dạng

$$y = 5(x - 1) + 2 = 5x - 3.$$

Câu 6. Gọi (C) là đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 + 3x + 2}{x - 1}$. Tìm tọa độ các điểm trên (C) mà tiếp tuyến tại đó

với (C) vuông góc với đường thẳng có phương trình $y = x + 4$.

A. $(1 + \sqrt{3}; 5 + 3\sqrt{3}), (1 - \sqrt{3}; 5 - 3\sqrt{3})$. **B.** $(2; 12)$.

C. $(0; 0)$. **D.** $(-2; 0)$.

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

$$\text{Đạo hàm: } y' = \frac{(2x+3)(x-1) - (x^2+3x+2)}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x - 5}{(x-1)^2}.$$

Giả sử x_0 là hoành độ điểm thỏa mãn yêu cầu bài toán $\Rightarrow y'(x_0) = -1$

$$\Rightarrow \frac{x_0^2 - 2x_0 - 5}{(x_0 - 1)^2} = -1 \Rightarrow x_0^2 - 2x_0 - 5 = -(x_0 - 1)^2$$

$$\Leftrightarrow 2x_0^2 - 4x_0 - 4 = 0 \Leftrightarrow x_0^2 - 2x_0 - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x_0 = 1 \pm \sqrt{3} \Rightarrow y = 5 \pm 3\sqrt{3}.$$

Câu 7. Biết tiếp tuyến (d) của hàm số $y = x^3 - 2x + 2$ vuông góc với đường phân giác góc phần tư thứ nhất. Phương trình (d) là:

A. $y = -x + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{18 - 5\sqrt{3}}{9}, y = -x + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{18 + 5\sqrt{3}}{9}$.

B. $y = x, y = x + 4$.

C. $y = -x + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{18 - 5\sqrt{3}}{9}, y = -x - \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{18 + 5\sqrt{3}}{9}$.

D. $y = x - 2, y = x + 4$.

Hướng dẫn giải:

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Chọn C.

$$y' = 3x^2 - 2.$$

Đường phân giác góc phần tư thứ nhất có phương trình $\Delta : x = y$.

$\Rightarrow (d)$ có hệ số góc là -1 .

$$y'(x_0) = -1 \Leftrightarrow 3x_0^2 - 2 = -1 \Leftrightarrow x_0 = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Phương trình tiếp tuyến cần tìm là

$$(d): y = -x + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{18 - 5\sqrt{3}}{9}, y = -x - \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{18 + 5\sqrt{3}}{9}.$$

Câu 8. Tìm hệ số góc của tiếp tuyến với đồ thị $y = \tan x$ tại điểm có hoành độ $x = \frac{\pi}{4}$.

- A. $k = 1$. B. $k = \frac{1}{2}$. C. $k = \frac{\sqrt{2}}{2}$. D. 2.

Hướng dẫn giải:

Chọn D.

$$y = \tan x \Rightarrow y' = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Hệ số góc của tiếp tuyến với đồ thị $y = \tan x$ tại điểm có hoành độ $x = \frac{\pi}{4}$ là $k = y' \left(\frac{\pi}{4} \right) = 2$.

Câu 9. Hệ số góc của tiếp tuyến của đường cong $y = f(x) = -\frac{1}{2} \sin \frac{x}{3}$ tại điểm có hoành độ $x_0 = \pi$ là:

- A. $-\frac{\sqrt{3}}{12}$. B. $\frac{\sqrt{3}}{12}$. C. $-\frac{1}{12}$. D. $\frac{1}{12}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn C

$$f'(x) = -\frac{1}{6} \cos \frac{x}{3} \Rightarrow f'(\pi) = -\frac{1}{6} \cos \frac{\pi}{3} = -\frac{1}{12}$$

Câu 10. Cho hàm số $y = x^3 - 6x^2 + 7x + 5$ (C). Tìm trên (C) những điểm có hệ số góc tiếp tuyến tại điểm đó bằng -2 ?

- A. $(-1; -9); (3; -1)$. B. $(1; 7); (3; -1)$. C. $(1; 7); (-3; -97)$. D. $(1; 7); (-1; -9)$.

Hướng dẫn giải:

Chọn B.

Gọi $M(x_0; y_0)$ là tọa độ tiếp điểm. Ta có $y' = 3x^2 - 12x + 7$.

Hệ số góc của tiếp tuyến bằng $-2 \Rightarrow y'(x_0) = -2 \Leftrightarrow 3x_0^2 - 12x_0 + 7 = -2$

$$\Leftrightarrow 3x_0^2 - 12x_0 + 9 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 1 \Rightarrow y_0 = 7 \\ x_0 = 3 \Rightarrow y_0 = -1 \end{cases}$$

Câu 11. Cho hàm số $y = \frac{x^2 + 3x + 3}{x + 2}$, tiếp tuyến của đồ thị hàm số vuông góc với đường thẳng.

$d: 3y - x + 6 = 0$ là

- A. $y = -3x - 3; y = -3x - 11$. B. $y = -3x - 3; y = -3x + 11$.
C. $y = -3x + 3; y = -3x - 11$. D. $y = -3x - 3; y = 3x - 11$.

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

$$d: 3y - x + 6 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{1}{3}x - 2 \Rightarrow k_d = \frac{1}{3}.$$

Gọi $M(x_0; y_0)$ là tọa độ tiếp điểm. Ta có $y' = \frac{x^2 + 4x + 3}{(x + 2)^2}$.

Tiếp tuyến vuông góc với $d \Rightarrow k_t \cdot k_d = -1 \Leftrightarrow k_t = -\frac{1}{k_d} = -3 \Rightarrow y'(x_0) = -3$

$$\Leftrightarrow \frac{x_0^2 + 4x_0 + 3}{(x_0 + 2)^2} = -3 \Leftrightarrow 4x_0^2 + 16x_0 + 15 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = -\frac{3}{2} \\ x_0 = -\frac{5}{2} \end{cases}$$

Với $x_0 = -\frac{3}{2} \Rightarrow y_0 = \frac{3}{2} \Rightarrow$ pttt: $y = -3 \left(x + \frac{3}{2} \right) + \frac{3}{2} \Leftrightarrow y = -3x - 3$.

Với $x_0 = -\frac{5}{2} \Rightarrow y_0 = -\frac{7}{2} \Rightarrow$ pttt: $y = -3\left(x + \frac{5}{2}\right) - \frac{7}{2} \Leftrightarrow y = -3x - 11$.

Câu 12. Tìm m để tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = (2m-1)x^4 - m + \frac{5}{4}$ tại điểm có hoành độ $x = -1$ vuông góc với đường thẳng $d: 2x - y - 3 = 0$.

- A. $\frac{3}{4}$. B. $\frac{1}{4}$. C. $\frac{7}{16}$. D. $\frac{9}{16}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn D.

$d: 2x - y - 3 = 0 \Leftrightarrow y = 2x - 3 \Rightarrow k_d = 2$.

$y = (2m-1)x^4 - m + \frac{5}{4} \Rightarrow y' = 4(2m-1)x^3$.

Hệ số góc của tiếp tuyến với đồ thị hàm số $y = (2m-1)x^4 - m + \frac{5}{4}$ tại điểm có hoành độ $x = -1$ là

$k_u = y'(-1) = 4(2m-1)(-1)^3 = -4(2m-1)$.

Ta có $k_u \cdot k_d = -1 \Leftrightarrow -8(2m-1) = -1 \Leftrightarrow m = \frac{9}{16}$

Câu 13. Cho hàm số $y = \frac{ax+b}{x-1}$ có đồ thị cắt trục tung tại $A(0; -1)$, tiếp tuyến tại A có hệ số góc $k = -3$. Các giá trị của a, b là

- A. $a = 1, b = 1$. B. $a = 2, b = 1$. C. $a = 1, b = 2$. D. $a = 2, b = 2$.

Hướng dẫn giải:

Chọn B.

$A(0; -1) \in (C): y = \frac{ax+b}{x-1} \Rightarrow \frac{b}{-1} = -1 \Leftrightarrow b = 1$.

Ta có $y' = \frac{-a-b}{(x-1)^2}$. Hệ số góc của tiếp tuyến với đồ thị tại điểm A là $k = y'(0) = -a-b = -3$

$\Leftrightarrow a = 3 - b = 2$.

Câu 14. Điểm M trên đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 1$ mà tiếp tuyến tại đó có hệ số góc k bé nhất trong tất cả các tiếp tuyến của đồ thị thì M, k là

- A. $M(1; -3), k = -3$. B. $M(1; 3), k = -3$. C. $M(1; -3), k = 3$. D. $M(-1; -3), k = -3$.

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Gọi $M(x_0; y_0)$. Ta có $y' = 3x^2 - 6x$.

Hệ số góc của tiếp tuyến với đồ thị tại M là $k = y'(x_0) = 3x_0^2 - 6x_0 = 3(x_0 - 1)^2 - 3 \geq -3$

Vậy k bé nhất bằng -3 khi $x_0 = 1, y_0 = -3$.

Câu 15. Cho hàm số $y = x^3 + 3x^2 - 6x + 1$ (C). Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) biết tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $y = -\frac{1}{18}x + 1$

- A. : $y = 18x + 8$ và $y = 18x - 27$. B. : $y = 18x + 8$ và $y = 18x - 2$.
C. : $y = 18x + 81$ và $y = 18x - 2$. D. : $y = 18x + 81$ và $y = 18x - 27$.

Hướng dẫn giải:

Chọn D.

Gọi $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm

Ta có: $y' = 3x^2 + 6x - 6$.

Vì tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $y = -\frac{1}{18}x + 1$ nên

Ta có: $y'(x_0) = 15 \Leftrightarrow x_0^2 + 2x_0 - 8 = 0 \Leftrightarrow x_0 = -4, x_0 = 2$

Từ đó ta tìm được hai tiếp tuyến: $y = 18x + 81$ và $y = 18x - 27$.

Câu 16. Cho hàm số $y = x^3 - 3x + 1$ (C). Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C), biết hệ số góc của tiếp tuyến bằng 9

A. $y = 9x - 1$ hay $y = 9x + 17$

B. $y = 9x - 1$ hay $y = 9x + 1$

C. $y = 9x - 13$ hay $y = 9x + 1$

D. $y = 9x - 13$ hay $y = 9x + 17$

Hướng dẫn giải:

Chọn D.

Ta có: $y' = 3x^2 - 3$. Gọi $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm

Ta có: $y'(x_0) = 9 \Leftrightarrow 3x_0^2 - 3 = 9 \Leftrightarrow x_0 = \pm 2$

• $x_0 = 2 \Rightarrow y_0 = 3$. Phương trình tiếp tuyến:

$$y = 9(x - 2) + 3 = 9x - 13.$$

• $x_0 = -2 \Rightarrow y_0 = -1$. Phương trình tiếp tuyến:

$$y = 9(x + 2) - 1 = 9x + 17.$$

Câu 17. Cho hàm số $y = x^3 - 3x + 1$ (C). Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C), biết tiếp tuyến vuông góc với trục Oy.

A. $y = 2, y = -1$

B. $y = 3, y = -1$

C. $y = 3, y = -2$

D. $x = 3, x = -1$

Hướng dẫn giải:

Chọn B.

Ta có: $y' = 3x^2 - 3$. Gọi $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm

Vì tiếp tuyến vuông góc với Oy nên ta có: $y'(x_0) = 0$

Hay $x_0 = \pm 1$. Từ đó ta tìm được hai tiếp tuyến: $y = 3, y = -1$.

Câu 18. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số: $y = 2x^4 - 4x^2 + 1$ biết tiếp tuyến song song với đường thẳng $y = 48x - 1$.

A. $y = 48x - 9$

B. $y = 48x - 7$

C. $y = 48x - 10$

D. $y = 48x - 79$

Hướng dẫn giải:

Chọn D.

Ta có: $y' = 8x^3 - 8x$

Gọi $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm.

Vì tiếp tuyến song song với đường thẳng $y = 48x - 1$

Nên ta có: $y'(x_0) = 48 \Leftrightarrow x_0^3 - x_0 - 6 = 0 \Leftrightarrow x_0 = 2$

Suy ra $y_0 = 17$. Phương trình tiếp tuyến là:

$$y = 48(x - 2) + 17 = 48x - 79.$$

Câu 19. Cho hàm số $y = x^4 + x^2 + 1$ (C). Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C), biết tiếp tuyến song song với đường thẳng $y = 6x - 1$

A. $y = 6x - 2$

B. $y = 6x - 7$

C. $y = 6x - 8$

D. $y = 6x - 3$

Hướng dẫn giải:

Chọn D.

Ta có: $y' = 4x^3 + 2x$. Gọi $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm

Vì tiếp tuyến song song với đường thẳng $y = 6x - 1$ nên ta có:

$$y'(x_0) = 6 \Leftrightarrow 4x_0^3 + 2x_0 = 6 \Leftrightarrow x_0 = 1 \Rightarrow y_0 = 3$$

Phương trình tiếp tuyến: $y = 6x - 3$.

Câu 20. Cho hàm số $y = \frac{2x+2}{x-1}$ (C). Viết phương trình tiếp tuyến của (C), biết tiếp tuyến song song với đường thẳng $d: y = -4x + 1$.

$$\text{A. } \begin{cases} y = -4x + 2 \\ y = -4x + 14 \end{cases}$$

$$\text{B. } \begin{cases} y = -4x + 21 \\ y = -4x + 14 \end{cases}$$

$$\text{C. } \begin{cases} y = -4x + 2 \\ y = -4x + 1 \end{cases}$$

$$\text{D. } \begin{cases} y = -4x + 12 \\ y = -4x + 14 \end{cases}$$

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Hàm số xác định với mọi $x \neq 1$. Ta có: $y' = \frac{-4}{(x-1)^2}$

Gọi $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm, suy ra phương trình tiếp tuyến của (C):

Vì tiếp tuyến song với đường thẳng $d: y = -4x + 1$ nên ta có:

$$y'(x_0) = -4 \Leftrightarrow \frac{-4}{(x_0-1)^2} = -4 \Leftrightarrow x_0 = 0, x_0 = 2.$$

- $x_0 = 0 \Rightarrow y_0 = 2 \Rightarrow \Delta: y = -4x + 2$
- $x_0 = 2 \Rightarrow y_0 = 6 \Rightarrow \Delta: y = -4x + 14$.

Câu 21. Cho hàm số $y = \frac{2x+2}{x-1}$ (C). Viết phương trình tiếp tuyến của (C), biết tiếp tuyến tạo với hai trục tọa độ một tam giác vuông cân.

$$\text{A. } \begin{cases} y = -x - 11 \\ y = -x + 7 \end{cases}$$

$$\text{B. } \begin{cases} y = -x - 11 \\ y = -x + 17 \end{cases}$$

$$\text{C. } \begin{cases} y = -x - 1 \\ y = -x + 17 \end{cases}$$

$$\text{D. } \begin{cases} y = -x - 1 \\ y = -x + 7 \end{cases}$$

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Hàm số xác định với mọi $x \neq 1$. Ta có: $y' = \frac{-4}{(x-1)^2}$

Gọi $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm, suy ra phương trình tiếp tuyến của (C):

Vì tiếp tuyến tạo với hai trục tọa độ một tam giác vuông cân nên tiếp tuyến phải vuông góc với một trong hai đường phân giác $y = \pm x$, do đó hệ số góc của tiếp tuyến bằng ± 1 hay $y'(x_0) = \pm 1$. Mà $y' < 0, \forall x \neq 1$ nên ta có

$$y'(x_0) = -1 \Leftrightarrow \frac{-4}{(x_0-1)^2} = -1 \Leftrightarrow x_0 = -1, x_0 = 3$$

- $x_0 = -1 \Rightarrow y_0 = 0 \Rightarrow \Delta: y = -x - 1$
- $x_0 = 3 \Rightarrow y_0 = 4 \Rightarrow \Delta: y = -x + 7$.

Câu 22. Cho hàm số $y = \frac{2x+1}{x-1}$ (C). Viết phương trình tiếp tuyến của (C) biết tiếp tuyến vuông góc

với đường thẳng $y = \frac{1}{3}x + 2$

$$\text{A. } y = -3x - 11 \text{ hay } y = -3x + 11$$

$$\text{B. } y = -3x - 11 \text{ hay } y = -3x + 1$$

$$\text{C. } y = -3x - 1 \text{ hay } y = -3x + 1$$

$$\text{D. } y = -3x - 1 \text{ hay } y = -3x + 11$$

Hướng dẫn giải:

Chọn D.

Ta có $y' = \frac{-3}{(x-1)^2}$. Gọi $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm. Vì tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $y = \frac{1}{3}x + 2$ nên ta có

$$y'(x_0) = -3 \Leftrightarrow \frac{-3}{(x_0-1)^2} = -3 \Leftrightarrow x_0 = 0, x_0 = 2$$

- $x_0 = 0 \Rightarrow y_0 = -1$, phương trình tiếp tuyến là:
 $y = -3x - 1$
- $x_0 = 2 \Rightarrow y_0 = 5$, phương trình tiếp tuyến là:
 $y = -3(x-2) + 5 = -3x + 11$.

Câu 23. Cho hàm số $y = x^3 - 2x^2 + 8x + 5$ có đồ thị là (C). Khẳng định nào sau đây đúng nhất ?

- A. Không có bất kỳ hai tiếp tuyến nào của đồ thị hàm số lại vuông góc với nhau
- B. Luôn có bất kỳ hai tiếp tuyến nào của đồ thị hàm số lại vuông góc với nhau
- C. Hàm số đi qua điểm $M(1;17)$
- D. Cả A, B, C đều sai

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Ta có $y'(x) = 3x^2 - 4x + 8$

Giả sử trái lại có hai tiếp tuyến với đồ thị (C) vuông góc với nhau.

Gọi x_1, x_2 tương ứng là các hoành độ của hai tiếp điểm của hai tiếp tuyến đó.

Gọi k_1, k_2 lần lượt là các hệ số góc của hai tiếp tuyến tại các điểm trên (C) có hoành độ x_1, x_2 .

$$\text{Khi đó } k_1, k_2 = -1 \Rightarrow y'(x_1) \cdot y'(x_2) = -1 \Rightarrow (3x_1^2 - 4x_1 + 8)(3x_2^2 - 4x_2 + 8) = -1 \quad (1)$$

Tam thức $f(t) = 3t^2 - 4t + 8$ có $\Delta' < 0$ nên $f(t) > 0 \forall t \in \mathbb{R}$ từ đó và từ (1) suy ra mâu thuẫn.

Vậy, giả thiết phản chứng là sai, suy ra (đpcm)

Câu 24. Cho hàm số $y = \frac{x^2 - 3x + 1}{x - 2}$ và xét các phương trình tiếp tuyến có hệ số góc $k = 2$ của đồ thị

hàm số là

A. $y = 2x - 1; y = 2x - 3.$

B. $y = 2x - 5; y = 2x - 3.$

C. $y = 2x - 1; y = 2x - 5.$

D. $y = 2x - 1; y = 2x + 5.$

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Gọi $M(x_0; y_0)$ là tọa độ tiếp điểm. Ta có $y' = \frac{x^2 - 4x + 5}{(x - 2)^2}$.

$$\text{Hệ số góc của tiếp tuyến } k = 2 \Rightarrow y'(x_0) = 2 \Leftrightarrow \frac{x_0^2 - 4x_0 + 5}{(x_0 - 2)^2} = 2 \Leftrightarrow x_0^2 - 4x_0 + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 1 \\ x_0 = 3 \end{cases}$$

Với $x_0 = 1 \Rightarrow y_0 = 1 \Rightarrow$ pttt: $y = 2(x - 1) + 1 \Leftrightarrow y = 2x - 1.$

Với $x_0 = 3 \Rightarrow y_0 = 1 \Rightarrow$ pttt: $y = 2(x - 3) + 1 \Leftrightarrow y = 2x - 5.$

Vậy hai phương trình tiếp tuyến cần tìm là $y = 2x - 1, y = 2x - 5.$

Câu 25. Cho hàm số $y = x^2 - 6x + 5$ có tiếp tuyến song song với trục hoành. Phương trình tiếp tuyến đó là:

A. $x = -3.$

B. $y = -4.$

C. $y = 4.$

D. $x = 3.$

Hướng dẫn giải:

Chọn B.

Tập xác định: $D = \mathbb{R}.$

Đạo hàm: $y' = 2x - 6.$

Vì tiếp tuyến song song với trục hoành nên ta có:

$$y'(x_0) = 0 \Rightarrow 2x_0 - 6 = 0 \Leftrightarrow x_0 = 3 \Rightarrow y_0 = -4 \Rightarrow d: y = -4.$$

Câu 26. Trong các tiếp tuyến tại các điểm trên đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$, tiếp tuyến có hệ số góc nhỏ nhất bằng

A. $-3.$

B. $3.$

C. $4.$

D. $0.$

Hướng dẫn giải:

Chọn đáp án A

Tập xác định: $D = \mathbb{R}.$

$$\text{Đạo hàm: } y' = 3x^2 - 6x = 3(x - 1)^2 - 3 \geq -3.$$

Vậy trong các tiếp tuyến tại các điểm trên đồ thị hàm số đã cho, tiếp tuyến có hệ số góc nhỏ nhất bằng $-3.$

Câu 27. Cho hàm số $y = 2 - \frac{4}{x}$ có đồ thị (H) . Đường thẳng Δ vuông góc với đường thẳng $d: y = -x + 2$ và tiếp xúc với (H) thì phương trình của Δ là

- A. $y = x + 4$. B. $\begin{cases} y = x - 2 \\ y = x + 4 \end{cases}$. C. $\begin{cases} y = x - 2 \\ y = x + 6 \end{cases}$. D. Không tồn tại.

Hướng dẫn giải:

Chọn đáp án C.

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Đạo hàm: $y' = \frac{4}{x^2}$

Đường thẳng Δ vuông góc với đường thẳng $d: y = -x + 2$ nên Δ có hệ số góc bằng 1. Ta có phương

$$\text{trình } 1 = \frac{4}{x^2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -2 \end{cases}$$

Tại $M(2; 0)$. Phương trình tiếp tuyến là $y = x - 2$.

Tại $N(-2; 4)$. Phương trình tiếp tuyến là $y = x + 6$.

Câu 28. Lập phương trình tiếp tuyến của đường cong $(C): y = x^3 + 3x^2 - 8x + 1$, biết tiếp tuyến đó song song với đường thẳng $\Delta: y = x + 2017$?

- A. $y = x + 2018$. B. $y = x + 4$.
C. $y = x - 4; y = x + 28$. D. $y = x - 2018$.

Hướng dẫn giải:

Chọn đáp án C.

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Đạo hàm: $y' = 3x^2 + 6x - 8$.

Tiếp tuyến cần tìm song song với đường thẳng $\Delta: y = x + 2017$ nên hệ số góc của tiếp tuyến là 1.

$$\text{Ta có phương trình } 1 = 3x^2 + 6x - 8 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -3 \end{cases}$$

Tại $M(1; -3)$. Phương trình tiếp tuyến là $y = x - 4$.

Tại $N(-3; 25)$. Phương trình tiếp tuyến là $y = x + 28$.

Câu 29. Hoành độ tiếp điểm của tiếp tuyến song song với trục hoành của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x + 2$ là

- A. $x = 1$ và $x = -1$. B. $x = -3$ và $x = 3$. C. $x = 1$ và $x = 0$. D. $x = 2$ và $x = -1$.

Hướng dẫn giải:

Chọn đáp án A.

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Đạo hàm: $y' = 3x^2 - 3$.

Tiếp tuyến song song với trục hoành có hệ số góc bằng 0 nên có phương trình $0 = 3x^2 - 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$

Câu 30. Cho hàm số $y = -x^3 + 3x^2 - 2$ có đồ thị (C) . Số tiếp tuyến của (C) song song với đường thẳng $y = -9x$ là:

- A. 1. B. 3. C. 4. D. 2.

Hướng dẫn giải:

Chọn D.

Ta có: $y' = -3x^2 + 6x$. Lấy điểm $M(x_0; y_0) \in (C)$.

Tiếp tuyến tại M song song với đường thẳng $y = -9x$ suy ra $y'(x_0) = -9$

$$\Leftrightarrow -3x_0^2 + 6x_0 + 9 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = -1 \\ x_0 = 3 \end{cases}$$

Với $x_0 = -1 \Rightarrow y_0 = 2$ ta có phương trình tiếp tuyến: $y = -9x - 7$.

Với $x_0 = 3 \Rightarrow y_0 = -2$ ta có phương trình tiếp tuyến: $y = -9x + 25$.

Vậy có 2 tiếp tuyến thỏa mãn.

Câu 31. Hoành độ tiếp điểm của tiếp tuyến với đồ thị hàm số $(C): y = \frac{1}{x^2 - 1}$ song song với trục hoành bằng:

A. -1.

B. 0.

C. 1.

D. 2.

Hướng dẫn giải:

Chọn B.

Ta có: $y' = -\frac{2x}{(x^2 - 1)^2}$. Lấy điểm $M(x_0; y_0) \in (C)$.

Tiếp tuyến tại điểm M song song với trục hoành nên $y'(x_0) = 0 \Leftrightarrow -\frac{2x_0}{(x_0^2 - 1)^2} = 0 \Leftrightarrow x_0 = 0$.

Câu 32. Tiếp tuyến của hàm số $y = \frac{x+8}{x-2}$ tại điểm có hoành độ $x_0 = 3$ có hệ số góc bằng

A. 3

B. -7

C. -10

D. -3

Hướng dẫn giải:

Ta có: $y' = \frac{-10}{(x-2)^2} \Rightarrow k = y'(x_0) = y'(3) = \frac{-10}{(3-2)^2} = -10$

Câu 33. Gọi (C) là đồ thị hàm số $y = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + x + 2$. Có hai tiếp tuyến của (C) cùng song song với đường thẳng $y = -2x + 5$. Hai tiếp tuyến đó là

A. $y = -2x + 4$ và $y = -2x - 2$

B. $y = -2x - \frac{4}{3}$ và $y = -2x - 2$

C. $y = -2x + \frac{2}{3}$ và $y = -2x + 2$

C. $y = -2x + 3$ và $y = -2x - 1$

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

Ta có $y' = x^2 - 4x + 1$

Vì tiếp tuyến song song với đường thẳng $d: y = -2x + 5 \Rightarrow k = y' = -2$

Suy ra $x_0^2 - 4x_0 + 1 = -2 \Leftrightarrow x_0^2 - 4x_0 + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 1 \\ x_0 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_0 = y(1) = \frac{4}{3} \\ y_0 = y(3) = -4 \end{cases}$

Vậy $d_1: y = -2x + \frac{2}{3}$ và $d_2: y = -2x + 2$

Câu 34. Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{x+1}{x-5}$ tại điểm $A(-1; 0)$ có hệ số góc bằng

A. $\frac{1}{6}$

B. $\frac{6}{25}$

C. $-\frac{1}{6}$

D. $-\frac{6}{25}$

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

Ta có $y' = \frac{-6}{(x-5)^2}$. Theo giả thiết: $k = y'(-1) = -\frac{1}{6}$

Câu 35. Cho hàm số $y = -x^2 - 4x + 3$ có đồ thị (P) . Nếu tiếp tuyến tại điểm M của (P) có hệ số góc bằng 8 thì hoành độ điểm M là:

- A. 12 B. -6 C. -1 D. 5

Hướng dẫn giải:

Chọn B.

Ta có $y' = -2x - 4$

Gọi tiếp điểm $M(x_0; y_0)$. Vì tiếp tuyến tại điểm M của (P) có hệ số góc bằng 8 nên $y'(x_0) = 8 \Leftrightarrow -2x_0 - 4 = 8 \Leftrightarrow x_0 = -6$

Câu 36. Cho hàm số $y = -x^3 + 3x^2 - 3$ có đồ thị (C) . Số tiếp tuyến của (C) vuông góc với đường thẳng $y = \frac{1}{9}x + 2017$ là:

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 0

Hướng dẫn giải:

Chọn đáp án B.

Tiếp tuyến của (C) vuông góc với đường thẳng $y = \frac{1}{9}x + 2017$ có dạng $\Delta: y = -9x + c$.

$$\Delta \text{ là tiếp tuyến của } (C) \Leftrightarrow \begin{cases} -x^3 + 3x^2 - 3 = -9x + c \\ -3x^2 + 6x = -9 \end{cases} \text{ có nghiệm} \Leftrightarrow \begin{cases} -x^3 + 3x^2 - 3 = -9x + c \\ x = -1 \\ x = 3 \end{cases}$$

Vậy có hai giá trị c thỏa mãn.

Câu 37. Hệ số góc của tiếp tuyến với đồ thị hàm số $f(x) = -x^3 + x + 2$ tại điểm $M(-2; 8)$ là:

- A. 11. B. -12 C. -11. D. 6.

Hướng dẫn giải:

Ta có $f'(-2) = -11$

Chọn đáp án C.

Câu 38. Cho hàm số $f(x) = \frac{x^2 - 2x - 1}{x - 2}$ có đồ thị (H) . Tìm tất cả tọa độ tiếp điểm của đường thẳng

Δ song song với đường thẳng $d: y = 2x - 1$ và tiếp xúc với (H) .

- A. $M\left(0; \frac{1}{2}\right)$ B. $M(2; 3)$
C. $M_1(2; 3)$ và $M_2(1; 2)$ D. Không tồn tại

Hướng dẫn giải:

Chọn đáp án C.

Đường thẳng Δ song song với đường thẳng $d: y = 2x - 1$ có dạng $\Delta: y = 2x + c$ ($c \neq -1$).

Δ là tiếp tuyến của $(H) \Leftrightarrow \frac{x^2 - 2x - 1}{x - 2} = 2x + c$ có nghiệm kép $\Leftrightarrow x^2 + (c - 2)x + 1 - 2c = 0$ có nghiệm

$$\text{kép } x \neq 2 \Leftrightarrow \begin{cases} c^2 + 4c = 0 \\ 4 + 2(c - 2) + 1 - 2c \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ c = -4 \end{cases}$$

Vậy có hai giá trị c thỏa mãn nên có hai tiếp tuyến tương ứng với hai tiếp điểm.

Câu 39. Cho hàm số $y = -\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 - 3x + 1$ có đồ thị (C) . Trong các tiếp tuyến với (C) , tiếp tuyến có hệ số góc lớn nhất bằng bao nhiêu?

- A. $k = 3$ B. $k = 2$ C. $k = 1$ D. $k = 0$

Hướng dẫn giải:

Chọn đáp án C.

Xét tiếp tuyến với (C) tại điểm có hoành độ x_0 bất kì trên (C) . Khi đó hệ số góc của tiếp tuyến đó là $y'(x_0) = -x_0^2 - 4x_0 - 3 = 1 - (x_0 + 2)^2 \leq 1 \forall x$.

Câu 40. Hệ số góc k của tiếp tuyến với đồ thị hàm số $y = \sin x + 1$ tại điểm có hoành độ $\frac{\pi}{3}$ là

- A. $k = \frac{1}{2}$. B. $k = \frac{\sqrt{3}}{2}$. C. $k = -\frac{1}{2}$. D. $k = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Hướng dẫn giải:**Chọn A.**

$$y' = \cos x, k = y'\left(\frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}.$$

Câu 41. Phương trình tiếp tuyến với đồ thị hàm số $y = \frac{x+1}{x-1}$ song song với đường thẳng

$$\Delta: 2x + y - 1 = 0 \text{ là}$$

- A. $2x + y - 7 = 0$. B. $2x + y = 0$. C. $-2x - y + 1 = 0$. D. $2x + y + 7 = 0$.

Hướng dẫn giải:**Chọn A.**

+Gọi $M(x_0; y_0)$ là tọa độ tiếp điểm ($x_0 \neq 1$).

$$+ y' = \frac{-2}{(x-1)^2}$$

+Vì tiếp tuyến song song với đường thẳng $\Delta: y = -2x + 1$ suy ra

$$y'(x_0) = \frac{-2}{(x_0-1)^2} = -2 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 2 \\ x_0 = 0 \end{cases}.$$

+ với $x_0 = 2 \Rightarrow y_0 = 3$, **PTTT tại điểm $(2; 3)$ là $y = -2(x-2) + 3 \Leftrightarrow 2x + y - 7 = 0$**

+ với $x_0 = 0 \Rightarrow y_0 = -1$, **PTTT tại điểm $(0; -1)$ là $y = -2x - 1 \Leftrightarrow 2x + y + 1 = 0$.**

Câu 42. Phương trình tiếp tuyến của $(C): y = x^3$ biết nó vuông góc với đường thẳng $\Delta: y = -\frac{x}{27} + 8$

là:

- A. $y = -\frac{1}{27}x + 8$. B. $y = 27x + 3$. C. $y = -\frac{1}{27}x + 3$. D. $y = 27x + 54$.

Hướng dẫn giải:**Chọn D.**

$$y' = 3x^2.$$

+Gọi $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm.

+ Vì tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $\Delta: y = -\frac{1}{27}x + 8$ suy ra

$$y'(x_0) = 27 \Leftrightarrow 3x_0^2 = 27 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 3 \\ x_0 = -3 \end{cases}.$$

+Với $x_0 = 3 \Rightarrow y_0 = 27$. PTTT là: $y = 27(x-3) + 27 \Leftrightarrow y = 27x - 54$

+ Với $x_0 = -3 \Rightarrow y_0 = -27$. PTTT là: $y = 27(x+3) - 27 \Leftrightarrow y = 27x + 54$.

Câu 43. Cho hàm số $y = 3x^2 - 2x + 5$, có đồ thị (C) . Tiếp tuyến của (C) vuông góc với đường thẳng $x + 4y + 1 = 0$ là đường thẳng có phương trình:

- A. $y = 4x + 1$. B. $y = 4x + 2$. C. $y = 4x - 4$. D. $y = 4x - 2$.

Hướng dẫn giải:**Đáp án C.**

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm $M(x_0; y_0)$ có phương trình là: $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$

$$d: x + 4y + 1 = 0 \Leftrightarrow y = -\frac{1}{4}x - \frac{1}{4}$$

$$y' = 6x - 2$$

Tiếp tuyến vuông góc với d nên $y'(x_0) \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) = -1 \Leftrightarrow y'(x_0) = 4 \Leftrightarrow 6x_0 - 2 = 4 \Leftrightarrow x_0 = 1$,

$y(1) = 6$. Phương trình tiếp tuyến có dạng: $y = 4x + 2$

Câu 44. Cho đường cong $y = \cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{x}{2}\right)$ và điểm M thuộc đường cong. Điểm M nào sau đây có tiếp tuyến tại điểm đó song song với đường thẳng $y = \frac{1}{2}x + 5$?

- A. $M\left(\frac{5\pi}{3}; 1\right)$. B. $M\left(\frac{-5\pi}{3}; -1\right)$. C. $M\left(\frac{-5\pi}{3}; 1\right)$. D. $M\left(\frac{-5\pi}{3}; 0\right)$.

Hướng dẫn giải:

Chọn đáp án C

Hai đường thẳng song song nếu hệ số góc bằng nhau.

Tiếp tuyến của đường cong có hệ số góc: $y'(x_M) = -\frac{1}{2} \sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{x_M}{2}\right)$

Hệ số góc của đường thẳng $k = \frac{1}{2}$

Ta có $-\frac{1}{2} \sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{x_M}{2}\right) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{x_M}{2}\right) = -1 \Leftrightarrow \frac{\pi}{3} + \frac{x_M}{2} = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x_M = -\frac{5\pi}{3} + k4\pi$

Câu 45. Tìm hệ số góc của cát tuyến MN của đường cong $(C): y = x^2 - x + 1$, biết hoành độ M, N theo thứ tự là 1 và 2.

- A. 3. B. $\frac{7}{2}$. C. 2. D. 1.

Hướng dẫn giải:

Đáp án C.

$M(1; 1), N(2; 3)$ Phương trình đường thẳng MN là: $y = 2x - 1$. Vậy hệ số góc của cát tuyến là 2

Câu 46. Cho hàm số $y = x^2 - 2x + 3$, có đồ thị (C) . Tiếp tuyến của (C) song song với đường thẳng $y = 2x + 2018$ là đường thẳng có phương trình:

- A. $y = 2x + 1$. B. $y = 2x - 1$. C. $y = 2x + 4$. D. $y = 2x - 4$.

Hướng dẫn giải:

Đáp án B.

$d: y = 2x + 2018$

Tiếp tuyến của (C) song song với $d \Leftrightarrow y'(x_0) = 2 \Leftrightarrow 2x_0 - 2 = 2 \Leftrightarrow x_0 = 2; y_0 = 3$

Vậy PTTT có dạng: $y = 2x - 1$.

Câu 47. Phương trình tiếp tuyến của $(C): y = x^3$ biết nó có hệ số góc $k = 12$ là:

- A. $y = 12x \pm 24$. B. $y = 12x \pm 16$. C. $y = 12x \pm 4$. D. $y = 12x \pm 8$.

Hướng dẫn giải:

Đáp án B.

$y' = 3x^2$. Ta có $y'(x_0) = 12 \Leftrightarrow 3x_0^2 = 12 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 2 \Rightarrow y_0 = 8 \\ x_0 = -2 \Rightarrow y_0 = -8 \end{cases}$

PPTT có dạng $y = 12x \pm 16$

Câu 48. Phương trình tiếp tuyến của $(C): y = x^3$ biết nó song song với đường thẳng $d: y = \frac{1}{3}x - 10$ là

- A. $y = \frac{1}{3}x \pm \frac{2}{27}$. B. $y = \frac{1}{3}x \pm \frac{1}{3}$. C. $y = \frac{1}{3}x \pm \frac{1}{27}$. D. $y = \frac{1}{3}x \pm 27$.

Hướng dẫn giải:

Đáp án A

$$y' = 3x^2. \text{ Ta có } y'(x_0) = \frac{1}{3} \Leftrightarrow 3x_0^2 = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = \frac{1}{3} \Rightarrow y_0 = \frac{1}{27} \\ x_0 = -\frac{1}{3} \Rightarrow y_0 = -\frac{1}{27} \end{cases}$$

PPTT có dạng $y = \frac{1}{3}x \pm \frac{2}{27}$

Câu 49. Tìm hệ số góc của cát tuyến MN của đường cong $(C) : y = f(x) = x^3 - x$, biết hoành độ M, N theo thứ tự là 0 và 3.

- A. 4. B. $\frac{1}{2}$. C. $\frac{5}{4}$. D. 8.

Hướng dẫn giải:

Chọn D

Gọi k là hệ số góc của cát tuyến MN với đường cong (C) .

$$\text{Ta có } k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_M) - f(x_N)}{x_M - x_N} = \frac{(0^3 - 0) - (3^3 - 3)}{0 - 3} = 8$$

Câu 50. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x - \frac{4}{3}$, biết tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $x + 4y - 1 = 0$.

- A. $y = 4x + \frac{7}{6}$; $y = 4x - \frac{2}{3}$ B. $y = 4x + \frac{73}{6}$; $y = 4x - \frac{26}{3}$
C. $y = 4x + \frac{73}{6}$; $y = 4x - \frac{2}{3}$ D. $y = 4x + \frac{7}{6}$; $y = 4x - \frac{26}{3}$

Hướng dẫn giải:

Chọn B

Tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $x + 4y - 1 = 0$

$$\Leftrightarrow y = -\frac{1}{4}x + \frac{1}{4} \Rightarrow \text{Tiếp tuyến có hệ số góc } k = 4$$

$$\Rightarrow y' = 4 \Leftrightarrow x^2 + x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = -3; x = 2$$

* $x = -3 \Rightarrow$ Phương trình tiếp tuyến $y = 4(x + 3) + \frac{1}{6} = 4x + \frac{73}{6}$

* $x = 2 \Rightarrow$ Phương trình tiếp tuyến $y = 4(x - 2) - \frac{2}{3} = 4x - \frac{26}{3}$

Câu 51. Tìm m để đồ thị $y = \frac{1}{3}mx^3 + (m - 1)x^2 + (3m - 4)x + 1$ có điểm mà tiếp tuyến tại đó vuông góc với đường thẳng $x - y + 2013 = 0$.

- A. $m \leq 1$ B. $-\frac{1}{2} \leq m$ C. $-\frac{1}{2} \leq m \leq 1$ D. $-\frac{1}{2} < m < 1$

Hướng dẫn giải:

Chọn C

Đề tiếp tuyến của đồ thị vuông góc với đường thẳng $x - y + 2012 = 0$ khi và chỉ khi $y' \cdot 1 = -1$ hay

$$mx^2 + (m + 1)x + 3m - 3 = 0 \text{ có nghiệm } \forall x \in \mathbb{R}. \text{ Đáp số: } -\frac{1}{2} \leq m \leq 1.$$

Câu 52. Tìm m để đồ thị $y = x^3 - 3mx + 2$ có tiếp tuyến tạo với đường thẳng $d : x + y + 7 = 0$ góc α sao cho $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{26}}$.

- A. $m = 2$ B. $m = 3$ C. $m = 1, m = 4$ D. Đáp án khác

Hướng dẫn giải:

Gọi k là hệ số góc của tiếp tuyến \Rightarrow tiếp tuyến có vectơ pháp tuyến $\vec{n}_1 = (k; -1)$, d có vectơ pháp tuyến $\vec{n}_2 = (1; 1)$

$$\text{Ta có } \cos \alpha = \frac{|\vec{n}_1 \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{26}} = \frac{|k-1|}{\sqrt{2}\sqrt{k^2+1}} \Leftrightarrow k = \frac{3}{2} \text{ hoặc } k = \frac{2}{3}$$

Yêu cầu bài toán \Leftrightarrow ít nhất một trong hai phương trình $y' = k_1$ hoặc $y' = k_2$ có nghiệm x tức

$$\begin{cases} 3x^2 + 2(1-2m)x + 2 - m = \frac{3}{2} \text{ có nghiệm} \\ 3x^2 + 2(1-2m)x + 2 - m = \frac{2}{3} \text{ có nghiệm} \end{cases}$$

Tìm điều kiện có nghiệm suy ra m .

Câu 53. Cho hàm số: $y = \frac{2x+2}{x-1}$ có đồ thị (C) . Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) biết tiếp tuyến có hệ số góc bằng -1 .

A. $y = -x - 2, y = -x + 7$.

B. $y = -x - 5, y = -x + 6$.

C. $y = -x - 1, y = -x + 4$.

D. $y = -x - 1, y = -x + 7$.

Hướng dẫn giải:

Chọn D

Hàm số đã cho xác định với $\forall x \neq 1$. Ta có: $y' = \frac{-4}{(x-1)^2}$

Gọi $M(x_0; y_0)$ là tọa độ tiếp điểm, suy ra phương trình tiếp tuyến của (C) :

$$y = \frac{-4}{(x_0-1)^2}(x-x_0) + \frac{2x_0+2}{x_0-1} \text{ với } y'(x_0) = \frac{-4}{(x_0-1)^2} \text{ và } y_0 = \frac{2x_0+2}{x_0-1}$$

Tiếp tuyến có hệ số góc bằng -1

Nên có: $\frac{-4}{(x-1)^2} = -1 \Leftrightarrow x_0 = 3, x_0 = -1$

* Với $x_0 = -1 \Rightarrow y_0 = 0 \Rightarrow \Delta: y = -x - 1$

* Với $x_0 = 2 \Rightarrow y_0 = 4 \Rightarrow \Delta: y = -x + 7$

Vậy, có 2 tiếp tuyến thỏa mãn đề bài: $y = -x - 1, y = -x + 7$.

Câu 54. Cho hàm số: $y = \frac{2x+2}{x-1}$ có đồ thị (C) . Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) biết tiếp tuyến song song với đường thẳng $d: y = -4x + 1$.

A. $y = -4x + 3, y = -4x + 4$.

B. $y = -4x + 2, y = -4x + 44$.

C. $y = -4x + 2, y = -4x + 1$.

D. $y = -4x + 2, y = -4x + 14$.

Hướng dẫn giải:

Chọn D

Hàm số đã cho xác định với $\forall x \neq 1$. Ta có: $y' = \frac{-4}{(x-1)^2}$

Gọi $M(x_0; y_0)$ là tọa độ tiếp điểm, suy ra phương trình tiếp tuyến của (C) :

$$y = \frac{-4}{(x_0-1)^2}(x-x_0) + \frac{2x_0+2}{x_0-1} \text{ với } y'(x_0) = \frac{-4}{(x_0-1)^2} \text{ và } y_0 = \frac{2x_0+2}{x_0-1}$$

Tiếp tuyến song song với đường thẳng $d: y = -4x + 1$.

Nên có: $y'(x_0) = -4 \Leftrightarrow \frac{-4}{(x_0-1)^2} = -4 \Leftrightarrow x_0 = 0 \text{ hoặc } x_0 = 2$

* Với $x_0 = 0 \Rightarrow y_0 = 2 \Rightarrow \Delta: y = -4x + 2$

* Với $x_0 = 2 \Rightarrow y_0 = 6 \Rightarrow \Delta: y = -4x + 14$

Vậy, có 2 tiếp tuyến thỏa mãn đề bài: $y = -4x + 2$, $y = -4x + 14$.

Câu 55. Viết phương trình tiếp tuyến với đồ thị hàm số: $y = \frac{2x}{x-1}$, biết hệ số góc của tiếp tuyến bằng

-2

A. $y = -2x + 1, y = -2x$

B. $y = -2x + 2, y = -2x + 4$

C. $y = -2x + 9, y = -2x$

D. $y = -2x + 8, y = -2x$

Hướng dẫn giải:

Chọn D

Ta có: $y' = \frac{2(x-1) - 2x}{(x-1)^2} = \frac{-2}{(x-1)^2}$.

Gọi $(x_0; y_0)$ là tọa độ tiếp điểm, hệ số góc tiếp tuyến tại $(x_0; y_0)$ bằng $y'(x_0) = \frac{-2}{(x_0-1)^2}$

Theo giả thiết, ta có: $y'(x_0) = -2 \Leftrightarrow \frac{-2}{(x_0-1)^2} = -2$

$\Leftrightarrow (x_0-1)^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0-1=1 \\ x_0-1=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0=2 \Rightarrow y_0=4 \\ x_0=0 \Rightarrow y_0=0 \end{cases}$

Vậy, có 2 tiếp tuyến thỏa mãn đề bài: $y = -2x + 8, y = -2x$

Câu 56. Viết phương trình tiếp tuyến với đồ thị hàm số: $y = \frac{2x}{x-1}$, biết tiếp tuyến song song với

đường thẳng $(d): x + 2y = 0$

A. $y = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{4}, y = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{4}$

B. $y = -\frac{1}{2}x + \frac{27}{4}, y = -\frac{1}{2}x - \frac{7}{4}$

C. $y = -\frac{1}{2}x + \frac{2}{4}, y = -\frac{1}{2}x - \frac{7}{4}$

D. $y = -\frac{1}{2}x + \frac{27}{4}, y = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{4}$

Hướng dẫn giải:

Chọn B

Ta có: $y' = \frac{2(x-1) - 2x}{(x-1)^2} = \frac{-2}{(x-1)^2}$.

Gọi $(x_0; y_0)$ là tọa độ tiếp điểm, hệ số góc tiếp tuyến tại $(x_0; y_0)$ bằng $y'(x_0) = \frac{-2}{(x_0-1)^2}$

Theo giả thiết, ta có: $\frac{-2}{(x_0-1)^2} = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow (x_0-1)^2 = \frac{1}{4}$

Vậy, có 2 tiếp tuyến thỏa mãn đề bài: $y = -\frac{1}{2}x + \frac{27}{4}, y = -\frac{1}{2}x - \frac{7}{4}$

Câu 57. Viết phương trình tiếp tuyến với đồ thị hàm số: $y = \frac{2x}{x-1}$, biết tiếp tuyến vuông góc với

đường thẳng $(\Delta): 9x - 2y + 1 = 0$

A. $y = -\frac{2}{9}x + \frac{2}{9}, y = -\frac{2}{9}x + \frac{8}{9}$

B. $y = -\frac{2}{9}x + \frac{32}{9}, y = -\frac{2}{9}x + \frac{8}{9}$

C. $y = -\frac{2}{9}x + \frac{1}{9}, y = -\frac{2}{9}x + \frac{8}{9}$

D. $y = -\frac{2}{9}x + \frac{32}{9}, y = -\frac{2}{9}x - \frac{4}{9}$

Hướng dẫn giải:

Chọn B

Ta có: $y' = \frac{2(x-1) - 2x}{(x-1)^2} = \frac{-2}{(x-1)^2}$.

Gọi $(x_0; y_0)$ là tọa độ tiếp điểm, hệ số góc tiếp tuyến tại $(x_0; y_0)$ bằng $y'(x_0) = \frac{-2}{(x_0-1)^2}$

Theo giả thiết, ta có: $\frac{-2}{(x_0-1)^2} = -\frac{2}{9} \Leftrightarrow (x_0-1)^2 = \frac{1}{9}$

Vậy, có 2 tiếp tuyến thỏa đề bài: $y = -\frac{2}{9}x + \frac{32}{9}, y = -\frac{2}{9}x + \frac{8}{9}$

Câu 58. Viết phương trình tiếp tuyến với đồ thị hàm số: $y = \frac{2x}{x-1}$, biết tạo với chiều dương của trục

hoành một góc α sao cho $\cos \alpha = -\frac{2}{\sqrt{5}}$

A. $y = \frac{1}{5}x + \frac{3}{4}$

B. $y = \frac{1}{5}x - \frac{3}{4}$

C. $y = \frac{1}{5}x + \frac{13}{4}$

D. Đáp án khác

Hướng dẫn giải:

Ta có: $y' = \frac{2(x-1) - 2x}{(x-1)^2} = \frac{-2}{(x-1)^2}$.

Gọi $(x_0; y_0)$ là tọa độ tiếp điểm, hệ số góc tiếp tuyến tại $(x_0; y_0)$ bằng $y'(x_0) = \frac{-2}{(x_0-1)^2}$

Tiếp tuyến tạo với chiều dương trục hoành, khi đó tồn tại $\alpha \in [0; \pi]$ để $\tan \alpha < 0$ và $\tan \alpha = \frac{-2}{(x_0-1)^2}$.

Ta có: $\tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} - 1 = \frac{1}{4} \Rightarrow \tan \alpha = -\frac{1}{2}$, nên có:

$$\frac{-2}{(x_0-1)^2} = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow (x_0-1)^2 = 4$$

Câu 59. Viết phương trình tiếp tuyến với đồ thị hàm số: $y = \frac{2x}{x-1}$, biết tại điểm M thuộc đồ thị và vuông góc với IM (I là giao điểm 2 tiệm cận)

A. $y = \frac{1}{5}x + \frac{3}{4}$

B. $y = \frac{1}{5}x - \frac{3}{4}$

C. $y = \frac{1}{5}x + \frac{13}{4}$

D. Đáp án khác

Hướng dẫn giải:

Ta có: $y' = \frac{2(x-1) - 2x}{(x-1)^2} = \frac{-2}{(x-1)^2}$.

Gọi $(x_0; y_0)$ là tọa độ tiếp điểm, hệ số góc tiếp tuyến tại $(x_0; y_0)$ bằng $y'(x_0) = \frac{-2}{(x_0-1)^2}$

$k_{IM} = \frac{2}{(x_0-1)^2}$, theo bài toán nên có: $k_{IM} \cdot y'(x_0) = -1 \Leftrightarrow (x_0-1)^2 = 4$

Câu 60. Cho hàm số $y = \frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} + 2$ có đồ thị (C). Viết phương trình tiếp tuyến của (C) song song với đường thẳng: $y = 2x - 2$.

A. $y = 2x + \frac{3}{4}$

B. $y = 2x + \frac{1}{4}$

C. $y = 2x - \frac{3}{4}$

D. $y = 2x + 1$

Hướng dẫn giải:

Chọn A

$y'(x_0) = 2$ (trong đó x_0 là hoành độ tiếp điểm của (t) với (C)).

$$\Leftrightarrow x_0^3 + x_0 = 2 \Leftrightarrow x_0^3 + x_0 - 2 = 0 \Leftrightarrow x_0 = 1.$$

Phương trình (t): $y = y'(1)(x-1) + y(1) = 2(x-1) + \frac{11}{4} = 2x + \frac{3}{4}$

Câu 61. Cho hàm số $y = 2x^4 - 4x^2 - 1$ có đồ thị là (C). Viết phương trình tiếp tuyến của (C), biết tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $x - 48y + 1 = 0$.

- A. $\Delta: y = -48x - 81$ B. $\Delta: y = -48x + 81$ C. $\Delta: y = -48x - 1$ D. $\Delta: y = -48x - 8$

Hướng dẫn giải:

Chọn A

Ta có $y' = 8x^3 - 8x$

Gọi $M(x_0; y_0)$. Tiếp tuyến Δ tại M có phương trình:

$$y = (8x_0^3 - 8x_0)(x - x_0) + 2x_0^4 - 4x_0^2 - 1. \text{ Vì tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng } x - 48y + 1 = 0$$

$$\text{Nên ta có: } y'(x_0) \cdot \frac{1}{48} = -1 \Leftrightarrow y'(x_0) = -48$$

$$x_0^3 - x_0 + 6 = 0 \Leftrightarrow x_0 = -2 \Rightarrow y_0 = 15.$$

$$\text{Phương trình } \Delta: y = -48(x + 2) + 15 = -48x - 81.$$

Câu 62. Cho (C) là đồ thị của hàm số $y = \frac{x^3}{3} - x^2 + 2x + 1$. Viết phương trình tiếp tuyến của (C) vuông

góc với đường thẳng $y = -\frac{x}{5} + 2$.

A. $y = 5x + \frac{2}{3}$ hoặc $y = 5x - 8$

B. $y = 5x + \frac{8}{3}$ hoặc $y = 5x - 9$

C. $y = 5x + \frac{8}{3}$ hoặc $y = 5x - 5$

D. $y = 5x + \frac{8}{3}$ hoặc $y = 5x - 8$

Hướng dẫn giải:

Chọn D

Cách 1. Tiếp tuyến (d) của (C) vuông góc với đường thẳng $y = -\frac{x}{5} + 2$, suy ra phương trình (d) có dạng: $y = 5x + m$.

$$(d) \text{ tiếp xúc với (C)} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^3}{3} - x^2 + 2x + 1 = 5x + m & (1) \\ x^2 - 2x + 2 = 5 & (2) \end{cases} \text{ có nghiệm.}$$

Giải hệ trên, (2) $\Leftrightarrow x = -1 \vee x = 3$.

Thay $x = -1$ vào (1) ta được $m = \frac{8}{3}$.

Thay $x = 3$ vào (1) ta được $m = -8$.

Vậy phương trình tiếp tuyến cần tìm là $y = 5x + \frac{8}{3}$ hoặc $y = 5x - 8$.

Cách 2. Tiếp tuyến (d) vuông góc với đường thẳng $y = -\frac{x}{5} + 2$ suy ra hệ số góc của (d): $k = 5$.

Gọi x_0 là hoành độ tiếp điểm của (d) với (C), ta có: $k = f'(x_0) \Leftrightarrow 5 = x_0^2 - 2x_0 + 2 \Leftrightarrow x_0 = -1, x_0 = 3$.

$$\text{Suy ra phương trình (d): } \begin{cases} y = 5(x + 1) + f(1) = 5x + \frac{8}{3} \\ y = 5(x + 3) + f(3) = 5x - 8 \end{cases}$$

Câu 63. Cho hàm số $y = x^3 - 2x^2 + (m - 1)x + 2m$ có đồ thị là (C_m) . Tìm m để tiếp tuyến của đồ thị (C_m) tại điểm có hoành độ $x = 1$ song song với đường thẳng $y = 3x + 10$.

A. $m = 2$

B. $m = 4$

C. $m = 0$

D. Không tồn tại m

Hướng dẫn giải:

Chọn D

Ta có: $y' = 3x^2 - 4x + m - 1$. Tiếp tuyến của (C_m) tại điểm có hoành độ $x = 1$ có phương trình

$$y = (m - 2)(x - 1) + 3m - 2 = (m - 2)x + 2m$$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \begin{cases} m-2=3 \\ 2m \neq 10 \end{cases}$ vô nghiệm.

Vậy không tồn tại m thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 64. Cho hàm số $y = x^3 - 2x^2 + (m-1)x + 2m$ có đồ thị là (C_m) . Tìm m để tiếp tuyến có hệ số góc nhỏ nhất của đồ thị (C_m) vuông góc với đường thẳng $\Delta: y = 2x + 1$.

- A. $m = 1$ B. $m = 2$ C. $m = \frac{11}{6}$ D. $m = \frac{6}{11}$

Hướng dẫn giải:

Chọn C

Ta có: $y' = 3x^2 - 4x + m - 1$. Ta có: $y' = 3\left(x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{4}{9}\right) + m - \frac{7}{3} = 3\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 + m - \frac{7}{3} \Rightarrow y' \geq m - \frac{7}{3}$.

Tiếp tuyến tại điểm có hoành độ $x = \frac{2}{3}$ có hệ số góc nhỏ nhất và hệ số góc có giá trị: $k = m - \frac{7}{3}$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow k \cdot 2 = -1 \Leftrightarrow \left(m - \frac{7}{3}\right) \cdot 2 = -1 \Leftrightarrow m = \frac{11}{6}$.

Câu 65. Cho hàm số $y = \frac{2x+1}{x-1}$ (C). Viết phương trình tiếp tuyến của (C) biết tiếp tuyến cắt Ox, Oy

lần lượt tại A, B sao cho tam giác OAB có diện tích bằng $\frac{1}{6}$

- A. $y = -3x + 1, y = -3x + 1, y = -12x + 2, y = -\frac{4}{3}x - \frac{1}{3}$
 B. $y = -3x + 1, y = -3x - 11, y = -12x - 2, y = -\frac{4}{3}x + \frac{2}{3}$
 C. $y = -3x + 11, y = -3x - 11, y = -12x, y = -\frac{4}{3}x - \frac{3}{4}$
 D. $y = -3x + 1, y = -3x + 11, y = -12x + 2, y = -\frac{4}{3}x - \frac{2}{3}$

Hướng dẫn giải:

Chọn D

Ta có $y' = \frac{-3}{(x-1)^2}$. Gọi $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm. Phương trình tiếp tuyến Δ có dạng:

$$y = \frac{-3}{(x_0-1)^2}(x-x_0) + \frac{2x_0+1}{x_0-1}$$

$$\bullet \Delta \cap Ox = A: \begin{cases} y = 0 \\ \frac{-3}{(x_0-1)^2}(x-x_0) + \frac{2x_0+1}{x_0-1} = 0 \end{cases}$$

Suy ra $A\left(\frac{2x_0^2+2x_0-1}{3}; 0\right)$.

$$\bullet \Delta \cap Oy = B: \begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{3x_0}{(x_0-1)^2} + \frac{2x_0+1}{x_0-1} \end{cases}$$

Suy ra: $B\left(0; \frac{2x_0^2+2x_0-1}{(x_0-1)^2}\right)$

Diện tích tam giác OAB: $S = \frac{1}{2}OA \cdot OB = \frac{1}{6}\left(\frac{2x_0^2+2x_0-1}{x_0-1}\right)^2$

$$\text{Suy ra } S_{OAB} = \frac{1}{6} \Leftrightarrow \left(\frac{2x_0^2 + 2x_0 - 1}{x_0 - 1} \right)^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x_0^2 + 2x_0 - 1 = x_0 - 1 \\ 2x_0^2 + 2x_0 - 1 = -x_0 + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_0^2 + x_0 = 0 \\ 2x_0^2 + 3x_0 - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 0, x_0 = -\frac{1}{2} \\ x_0 = \frac{1}{2}, x_0 = -2 \end{cases}$$

Từ đó ta tìm được các tiếp tuyến là:

$$y = -3x + 1, y = -3x + 11, y = -12x + 2, y = -\frac{4}{3}x - \frac{2}{3}.$$

Câu 66. Cho hàm số $y = \frac{x^2 - 2mx + m}{x + m}$. Giá trị m để đồ thị hàm số cắt trục Ox tại hai điểm và tiếp tuyến của đồ thị tại hai điểm đó vuông góc là

A. 3.

B. 4.

C. 5.

D. 7.

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $(C): y = \frac{x^2 - 2mx + m}{x + m}$ và trục hoành:

$$\frac{x^2 - 2mx + m}{x + m} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2mx + m = 0 (*) \\ x \neq -m \end{cases}.$$

Đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 - 2mx + m}{x + m}$ cắt trục Ox tại hai điểm phân biệt \Leftrightarrow phương trình $(*)$ có hai

$$\text{ng nghiệm phân biệt khác } -m \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = m^2 - m > 0 \\ 3m^2 + m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \vee m > 1 \\ m \neq -\frac{1}{3} \end{cases}.$$

Gọi $M(x_0; y_0)$ là giao điểm của đồ thị (C) với trục hoành thì $y_0 = x_0^2 - 2mx_0 + m = 0$ và hệ số góc của tiếp tuyến với (C) tại M là:

$$k = y'(x_0) = \frac{(2x_0 - 2m)(x_0 - 1) - (x_0^2 - 2mx_0 + m)}{(x_0 + m)^2} = \frac{2x_0 - 2m}{x_0 + m}.$$

Vậy hệ số góc của hai tiếp tuyến với (C) tại hai giao điểm với trục hoành là $k_1 = \frac{2x_1 - 2m}{x_1 + m}$,

$$k_2 = \frac{2x_2 - 2m}{x_2 + m}.$$

$$\text{Hai tiếp tuyến này vuông góc } \Leftrightarrow k_1 \cdot k_2 = -1 \Leftrightarrow \left(\frac{2x_1 - 2m}{x_1 + m} \right) \left(\frac{2x_2 - 2m}{x_2 + m} \right) = -1$$

$$\Leftrightarrow 4[x_1x_2 - m(x_1 + x_2) + m^2] = -[x_1x_2 + m(x_1 + x_2) + m^2] (**).$$

$$\text{Ta lại có } \begin{cases} x_1x_2 = m \\ x_1 + x_2 = 2m \end{cases}, \text{ do đó } (**)\Leftrightarrow m^2 - 5m = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = 5 \end{cases}. \text{ Nhận } m = 5.$$

Câu 67. Cho hàm số $y = \frac{x+1}{x-1}$ (C) . Có bao nhiêu cặp điểm A, B thuộc (C) mà tiếp tuyến tại đó song song với nhau:

A. 0.

B. 2.

C. 1.

D. Vô số.

Hướng dẫn giải:

Chọn D.

$$\text{Ta có: } y' = \frac{-2}{(x-1)^2}.$$

Đồ thị hàm số $y = \frac{x+1}{x-1}$ có tâm đối xứng $I(1;1)$.

Lấy điểm tùy ý $A(x_0; y_0) \in (C)$.

Gọi B là điểm đối xứng với A qua I suy ra $B(2-x_0; 2-y_0) \in (C)$. Ta có:

Hệ số góc của tiếp tuyến tại điểm A là: $k_A = y'(x_0) = \frac{-2}{(x_0-1)^2}$.

Hệ số góc của tiếp tuyến tại điểm B là: $k_B = y'(2-x_0) = \frac{-2}{(1-x_0)^2}$.

Ta thấy $k_A = k_B$ nên có vô số cặp điểm A, B thuộc (C) mà tiếp tuyến tại đó song song với nhau

Câu 68. Cho hàm số $y = x^3 - 2x^2 + 2x$ có đồ thị (C) . Gọi x_1, x_2 là hoành độ các điểm M, N trên (C) , mà tại đó tiếp tuyến của (C) vuông góc với đường thẳng $y = -x + 2017$. Khi đó $x_1 + x_2$ bằng:

- A. $\frac{4}{3}$. B. $-\frac{4}{3}$. C. $\frac{1}{3}$. D. -1 .

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Ta có: $y' = 3x^2 - 4x + 2$.

Tiếp tuyến tại M, N của (C) vuông góc với đường thẳng $y = -x + 2017$. Hoành độ x_1, x_2 của các điểm M, N là nghiệm của phương trình $3x^2 - 4x + 1 = 0$.

Suy ra $x_1 + x_2 = \frac{4}{3}$.

Câu 69. Số cặp điểm A, B trên đồ thị hàm số $y = x^3 + 3x^2 + 3x + 5$, mà tiếp tuyến tại A, B vuông góc với nhau là

- A. 1 B. 0 C. 2. D. Vô số

Hướng dẫn giải:

Chọn B.

Ta có $y' = 3x^2 + 6x + 3$. Gọi $A(x_A; y_A)$ và $B(x_B; y_B)$

Tiếp tuyến tại A, B với đồ thị hàm số lần lượt là:

$$d_1 : y = (3x_A^2 + 6x_A + 3)(x - x_A) + y_A$$

$$d_2 : y = (3x_B^2 + 6x_B + 3)(x - x_B) + y_B$$

Theo giả thiết $d_1 \perp d_2 \Leftrightarrow k_1 \cdot k_2 = -1$

$$\Leftrightarrow (3x_A^2 + 6x_A + 3) \cdot (3x_B^2 + 6x_B + 3) = -1 \Leftrightarrow 9(x_A^2 + 2x_A + 1) \cdot (x_B^2 + 2x_B + 1) = -1$$

$$\Leftrightarrow 9(x_A + 1)^2 \cdot (x_B + 1)^2 = -1 \text{ (vô lý)}$$

Suy ra không tồn tại hai điểm A, B

Câu 70. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$ có đồ thị (C) . Đường thẳng nào sau đây là tiếp tuyến của (C) và có hệ số góc nhỏ nhất:

- A. $y = -3x + 3$ B. $y = 0$ C. $y = -5x + 10$ D. $y = -3x - 3$

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Gọi $M(x_0; x_0^3 - 3x_0^2 + 2)$ là tiếp điểm của phương trình tiếp tuyến với đồ thị (C)

$$y' = 3x_0^2 - 6x_0$$

Phương trình tiếp tuyến tại M có dạng: $y = k(x - x_0) + y_0$

$$\text{Mà } k = y'(x_0) = 3x_0^2 - 6x_0 = 3(x_0^2 - 2x_0 + 1) - 3$$

$$\Leftrightarrow 3(x_0 - 1)^2 - 3 \geq -3$$

Hệ số góc nhỏ nhất khi $x_0 = 1 \Rightarrow y_0 = y(1) = 0; k = -3$

Vậy phương trình tiếp tuyến tại điểm $(1; 0)$ có hệ số góc nhỏ nhất là: $y = -3x + 3$

Câu 71. Cho hai hàm $f(x) = \frac{1}{x\sqrt{2}}$ và $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{2}}$. Góc giữa hai tiếp tuyến của đồ thị mỗi hàm số đã cho tại giao điểm của chúng là:

- A. 90° B. 30° C. 45° D. 60° .

Hướng dẫn giải:

Chọn đáp án A.

$$\text{Phương trình hoành độ giao điểm } \frac{1}{x\sqrt{2}} = \frac{x^2}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \frac{1}{x} = x^2 \Leftrightarrow x = 1 \Rightarrow y = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow M\left(1; \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\text{Ta có } f'(1) = -\frac{1}{\sqrt{2}}, g'(1) = \frac{2}{\sqrt{2}} \Rightarrow f'(1) \cdot g'(1) = -1$$

Câu 72. Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + (m+1)x - m$. Gọi A là giao điểm của đồ thị hàm số với Oy . Tìm m để tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại A vuông góc với đường thẳng $y = 2x - 3$.

- A. $\frac{-3}{2}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{3}{2}$ D. $-\frac{1}{2}$

Hướng dẫn giải:

Chọn đáp án A.

Ta có $A(0; -m) \Rightarrow f'(0) = m + 1$. Vì tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại A vuông góc với đường thẳng $y = 2x - 3$ nên $2 \cdot (m + 1) = -1 \Leftrightarrow m = -\frac{3}{2}$.

Câu 73. Cho hàm số $y = \frac{(3m+1)x - m^2 + m}{x+m}$ có đồ thị là (C_m) , $m \in \mathbb{R}$ và $m \neq 0$. Với giá trị nào của m thì tại giao điểm đồ thị với trục hoành, tiếp tuyến của đồ thị sẽ song song với đường thẳng $x - y - 10 = 0$.

- A. $m = -1; m = -\frac{1}{5}$ B. $m = 1; m = -\frac{1}{5}$ C. $m = -1; m = \frac{1}{5}$ D. $m = 1; m = \frac{1}{5}$

Hướng dẫn giải:

Chọn đáp án A.

Hoành độ giao điểm của đồ thị với trục hoành là nghiệm phương trình:

$$\frac{(3m+1)x - m^2 + m}{x+m} = 0, m \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -m, m \neq 0 \\ (3m+1)x - m^2 + m = 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -m, m \neq 0, m \neq -\frac{1}{3} \\ x = \frac{m^2 - m}{3m+1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0, m \neq -\frac{1}{3} \\ x = \frac{m^2 - m}{3m+1} \neq -m \end{cases} \cdot \text{Mà } y' = \frac{4m^2}{(x+m)^2} \Rightarrow y' \left(\frac{m^2 - m}{3m+1} \right) = \frac{4m^2}{\left(\frac{m^2 - m}{3m+1} + m \right)^2}$$

. Tiếp tuyến song song với đường thẳng $x - y - 10 = 0$ nên $y' \left(\frac{m^2 - m}{3m+1} \right) = 1 \Leftrightarrow m = -1$ hoặc $m = -\frac{1}{5}$

* $m = -1$ giao điểm là $A(-1; 0)$, tiếp tuyến là $y = x + 1$.

* $m = -\frac{1}{5}$ giao điểm là $B\left(\frac{3}{5}; 0\right)$, tiếp tuyến là $y = x - \frac{3}{5}$.

Câu 74. Tìm $m \in \mathbb{R}$ để tiếp tuyến có hệ số góc nhỏ nhất của $(C_m): y = x^3 - 2x^2 + (m-1)x + 2m$ vuông góc với đường thẳng $y = -x$

A. $m = \frac{10}{3}$

B. $m = \frac{1}{3}$

C. $m = \frac{10}{13}$

D. $m = 1$

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

$y' = 3x^2 - 4x + m - 1 = 3\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 + m - \frac{7}{3} \geq m - \frac{7}{3} \Rightarrow y' \geq m - \frac{7}{3} \Rightarrow y' = m - \frac{7}{3}$ khi $x = \frac{2}{3}$. Theo bài toán

ta có: $y'(-1) = -1 \Leftrightarrow \left(m - \frac{7}{3}\right)(-1) = -1 \Leftrightarrow m = \frac{10}{3}$.

Câu 75. Xác định m để hai tiếp tuyến của đồ thị $y = -x^4 + 2mx^2 - 2m + 1$ tại $A(1;0)$ và $B(-1;0)$ hợp với nhau một góc μ sao cho $\cos \mu = \frac{15}{17}$.

A. $m = 0, m = 2, m = \frac{5}{16}, m = \frac{7}{6}$.

B. $m = 0, m = 2, m = \frac{15}{16}, m = \frac{17}{16}$.

C. $m = 0, m = 2, m = \frac{15}{16}, m = \frac{7}{16}$.

D. $m = 0, m = 2, m = \frac{5}{6}, m = \frac{7}{6}$.

Hướng dẫn giải:

Đễ thấy, A, B là 2 điểm thuộc đồ thị với $\forall m \in \mathbb{R}$.

Tiếp tuyến d_1 tại $A: (4m-4)x - y - 4m + 4 = 0$

Tiếp tuyến d_2 tại $B: (-4m+4)x - y - 4m + 4 = 0$

Đáp số: $m = 0, m = 2, m = \frac{15}{16}, m = \frac{17}{16}$.

Câu 76. Tìm m để đồ thị $y = \frac{1}{3}mx^3 + (m-1)x^2 + (4-3m)x + 1$ tồn tại đúng 2 điểm có hoành độ dương mà tiếp tuyến tại đó vuông góc với đường thẳng $x + 2y - 3 = 0$.

A. $m \in \left(0; \frac{1}{4}\right) \cup \left(\frac{1}{2}; \frac{2}{3}\right)$

B. $m \in \left(0; \frac{1}{4}\right) \cup \left(\frac{1}{2}; \frac{7}{3}\right)$

C. $m \in \left(0; \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}; \frac{8}{3}\right)$

D. $m \in \left(0; \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}; \frac{2}{3}\right)$

Hướng dẫn giải:

Chọn D.

Hàm số đã cho xác định trên \mathbb{R} .

Ta có: $y' = mx^2 + 2(m-1)x + 4 - 3m$.

Từ yêu cầu bài toán dẫn đến phương trình $y\left(-\frac{1}{2}\right) = -1$ có đúng 2 nghiệm dương phân biệt, tức

$$mx^2 + 2(m-1)x + 2 - 3m = 0 \text{ có đúng 2 dương phân biệt} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta' > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m \neq \frac{1}{2} \\ 0 < m < 1 \\ 0 < m < \frac{2}{3} \end{cases} \text{ hay}$$

$m \in \left(0; \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}; \frac{2}{3}\right)$.

DẠNG 3: TIẾP TUYẾN ĐI QUA MỘT ĐIỂM

Câu 1. Cho hàm số $y = \frac{x+2}{x-2}$, tiếp tuyến của đồ thị hàm số kẻ từ điểm $(-6;5)$ là

A. $y = -x - 1$; $y = \frac{1}{4}x + \frac{7}{2}$.

B. $y = -x - 1$; $y = -\frac{1}{4}x + \frac{7}{2}$.

C. $y = -x + 1$; $y = -\frac{1}{4}x + \frac{7}{2}$.

D. $y = -x + 1$; $y = -\frac{1}{4}x - \frac{7}{2}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn B.

$$y = \frac{x+2}{x-2} \Rightarrow y' = \frac{-4}{(x-2)^2}.$$

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) : $y = \frac{x+2}{x-2}$ tại điểm $M(x_0; y_0) \in (C)$ với $x_0 \neq 2$ là:

$$y = y'(x_0)(x - x_0) + y_0 \Leftrightarrow y = \frac{-4}{(x_0 - 2)^2}(x - x_0) + \frac{x_0 + 2}{x_0 - 2}.$$

Vì tiếp tuyến đi qua điểm $(-6;5)$ nên ta có $5 = \frac{-4}{(x_0 - 2)^2}(-6 - x_0) + \frac{x_0 + 2}{x_0 - 2}$

$$\Leftrightarrow 4x_0^2 - 24x_0 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \\ x_0 = 6 \end{cases}$$

Vậy có hai tiếp tuyến thỏa đề bài là: $y = -x - 1$ và $y = -\frac{1}{4}x + \frac{7}{2}$.

Câu 2. Tiếp tuyến kẻ từ điểm $(2;3)$ tới đồ thị hàm số $y = \frac{3x+4}{x-1}$ là

A. $y = -28x + 59$; $y = x + 1$.

B. $y = -24x + 51$; $y = x + 1$.

C. $y = -28x + 59$.

D. $y = -28x + 59$; $y = -24x + 51$.

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

$$y = \frac{3x+4}{x-1} \Rightarrow y' = \frac{-7}{(x-1)^2}.$$

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) : $y = \frac{3x+4}{x-1}$ tại điểm $M(x_0; y_0) \in (C)$ với $x_0 \neq 1$ là:

$$y = y'(x_0)(x - x_0) + y_0 \Leftrightarrow y = \frac{-7}{(x_0 - 1)^2}(x - x_0) + \frac{3x_0 + 4}{x_0 - 1}.$$

Vì tiếp tuyến đi qua điểm $(2;3)$ nên ta có $3 = \frac{-7}{(x_0 - 1)^2}(2 - x_0) + \frac{3x_0 + 4}{x_0 - 1} \Leftrightarrow x_0 = \frac{3}{2}$.

Vậy có một tiếp tuyến thỏa đề bài là: $y = -28x + 59$.

Câu 3. Cho hàm số $y = \frac{x^2 + x + 1}{x + 1}$ có đồ thị (C) . Phương trình tiếp tuyến của (C) đi qua điểm

$A(-1;0)$ là:

A. $y = \frac{3}{4}x$

B. $y = \frac{3}{4}(x+1)$

C. $y = 3(x+1)$

D. $y = 3x + 1$

Hướng dẫn giải:

Chọn B.

Gọi d là phương trình tiếp tuyến của (C) có hệ số góc k ,

Vi $A(-1;0) \in d$ suy ra $d: y = k(x+1)$

$$d \text{ tiếp xúc với } (C) \text{ khi hệ } \begin{cases} \frac{x^2+x+1}{x+1} = k(x+1) & (1) \\ \frac{x^2+2x}{(x+1)^2} = k & (2) \end{cases} \text{ có nghiệm}$$

Thay (2) vào (1) ta được $x=1 \Rightarrow k = y'(1) = \frac{3}{4}$.

Vậy phương trình tiếp tuyến của (C) đi qua điểm $A(-1;0)$ là: $y = \frac{3}{4}(x+1)$

Câu 4. Qua điểm $A(0;2)$ có thể kẻ được bao nhiêu tiếp tuyến với đồ thị của hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 2$

A. 2

B. 3

C. 0

D. 1

Hướng dẫn giải:

Chọn B.

Gọi d là tiếp tuyến của đồ thị hàm số đã cho.

Vi $A(0;2) \in d$ nên phương trình của d có dạng: $y = kx + 2$

$$\text{Vi } d \text{ tiếp xúc với đồ thị } (C) \text{ nên hệ } \begin{cases} x^4 - 2x^2 + 2 = kx + 2 & (1) \\ 4x^3 - 4x = k & (2) \end{cases} \text{ có nghiệm}$$

$$\text{Thay (2) và (1) ta suy ra được } \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm \sqrt{\frac{2}{3}} \end{cases}$$

Chúng ta từ A có thể kẻ được 3 tiếp tuyến đến đồ thị (C)

Câu 5. Cho hàm số $y = -x^4 + 2x^2$ có đồ thị (C). Xét hai mệnh đề:

(I) Đường thẳng $\Delta: y = 1$ là tiếp tuyến với (C) tại $M(-1;1)$ và tại $N(1;1)$

(II) Trục hoành là tiếp tuyến với (C) tại gốc tọa độ

Mệnh đề nào đúng?

A. Chỉ (I)

B. Chỉ (II)

C. Cả hai đều sai

D. Cả hai đều đúng

Hướng dẫn giải:

Chọn đáp án D.

Ta có $y'(-1) = y'(1) = 0 \Rightarrow$ (I) đúng.

Ta có $y'(0) = 0 \Rightarrow$ (II) đúng.

Câu 6. Cho hàm số $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$ có đồ thị là (C). Từ một điểm bất kì trên đường thẳng $x = 2$ kẻ được bao nhiêu tiếp tuyến đến (C):

A. 2.

B. 1.

C. 3.

D. 0.

Hướng dẫn giải:

Chọn đáp án B.

Xét đường thẳng kẻ từ một điểm bất kì trên đường thẳng $x = 2$ có dạng $\Delta: y = k(x-2) = kx - 2k$.

$$\Delta \text{ là tiếp tuyến của } (C) \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 6x^2 + 9x - 1 = kx - 2k \\ 3x^2 - 12x + 9 = k \end{cases} \text{ có nghiệm} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^3 - 12x^2 + 24x - 17 = 0 \\ 3x^2 - 12x + 9 = k \end{cases}$$

Phương trình bậc ba có duy nhất một nghiệm tương ứng cho ta một giá trị k . Vậy có một tiếp tuyến. Để thấy kẻ từ một điểm bất kì trên đường thẳng $x = 2$ có dạng $y = a$ song song với trục Ox cũng chỉ kẻ được một tiếp tuyến.

Câu 7. Đường thẳng $y = 3x + m$ là tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3 + 2$ khi m bằng

A. 1 hoặc -1.

B. 4 hoặc 0.

C. 2 hoặc -2.

D. 3 hoặc -3.

Hướng dẫn giải:

Chọn B.

Đường thẳng $y = 3x + m$ và đồ thị hàm số $y = x^3 + 2$ tiếp xúc nhau

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^3 + 2 = 3x + m \\ 3x^2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = x^3 - 3x + 2 \\ x = \pm 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = 4 \end{cases}$$

Câu 8. Định m để đồ thị hàm số $y = x^3 - mx^2 + 1$ tiếp xúc với đường thẳng $d : y = 5$?

A. $m = -3$.

B. $m = 3$.

C. $m = -1$.

D. $m = 2$.

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Đường thẳng $y = x^3 - mx^2 + 1$ và đồ thị hàm số $y = 5$ tiếp xúc nhau

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - mx^2 + 1 = 5 & (1) \\ 3x^2 - 2mx = 0 & (2) \end{cases} \text{ có nghiệm.}$$

$$(2) \Leftrightarrow x(3x - 2m) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{2m}{3} \end{cases}$$

+ Với $x = 0$ thay vào (1) không thỏa mãn.

+ Với $x = \frac{2m}{3}$ thay vào (1) ta có: $m^3 = -27 \Leftrightarrow m = -3$.

Câu 9. Phương trình tiếp tuyến của $(C) : y = x^3$ biết nó đi qua điểm $M(2; 0)$ là:

A. $y = 27x \pm 54$.

B. $y = 27x - 9 \vee y = 27x - 2$.

C. $y = 27x \pm 27$.

D. $y = 0 \vee y = 27x - 54$.

Hướng dẫn giải:

Vậy chọn D.

$$+ y' = 3x^2.$$

+ Gọi $A(x_0; y_0)$ là tiếp điểm. PTTT của (C) tại $A(x_0; y_0)$ là:

$$y = 3x_0^2(x - x_0) + x_0^3 \quad (d).$$

+ Vì tiếp tuyến (d) đi qua $M(2; 0)$ nên ta có phương trình:

$$3x_0^2(2 - x_0) + x_0^3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \\ x_0 = 3 \end{cases}$$

+ Với $x_0 = 0$ thay vào (d) ta có tiếp tuyến $y = 0$.

+ Với $x_0 = 3$ thay vào (d) ta có tiếp tuyến $y = 27x - 54$.

Câu 10. Cho hàm số $y = x^2 - 5x - 8$ có đồ thị (C) . Khi đường thẳng $y = 3x + m$ tiếp xúc với (C) thì tiếp điểm sẽ có tọa độ là:

A. $M(4; 12)$.

B. $M(-4; 12)$.

C. $M(-4; -12)$.

D. $M(4; -12)$.

Hướng dẫn giải:

Đáp án D.

Đường thẳng $d : y = 3x + m$ tiếp xúc với $(C) \Rightarrow d$ là tiếp tuyến với (C) tại $M(x_0; y_0)$

$$y' = 2x - 5 \Rightarrow y'(x_0) = 3 \Leftrightarrow 2x_0 - 5 = 3 \Leftrightarrow x_0 = 4; y_0 = -12.$$

Câu 11. Cho hàm số $f(x) = \frac{x^2}{4} - x + 1$, có đồ thị (C) . Từ điểm $M(2; -1)$ có thể kẻ đến (C) hai tiếp tuyến phân biệt. Hai tiếp tuyến này có phương trình:

A. $y = -x + 1$ và $y = x - 3$.

B. $y = 2x - 5$ và $y = -2x + 3$.

C. $y = -x - 1$ và $y = -x + 3$.

D. $y = x + 1$ và $y = -x - 3$.

Hướng dẫn giải:

Chọn A

Gọi $N(x_0; y_0)$ là tiếp điểm; $y_0 = \frac{x_0^2}{4} - x_0 + 1$; $f'(x_0) = \frac{x_0}{2} - 1$

Phương trình tiếp tuyến tại N là: $y = \left(\frac{x_0}{2} - 1\right)(x - x_0) + \frac{x_0^2}{4} - x_0 + 1$

Mà tiếp tuyến đi qua $M(2; -1) \Rightarrow -1 = \left(\frac{x_0}{2} - 1\right)(2 - x_0) + \frac{x_0^2}{4} - x_0 + 1 \Leftrightarrow -\frac{x_0^2}{4} + x_0 = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 0; y_0 = 1; f'(0) = -1 \\ x_0 = 4; y_0 = 1; f'(4) = 1 \end{cases}$$

Phương trình tiếp tuyến: $y = -x + 1$ và $y = x - 3$.

Câu 12. Cho hàm số $y = x^3 + 3x^2 - 6x + 1$ (C). Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) biết tiếp tuyến đi qua điểm $N(0; 1)$.

A. $y = -\frac{33}{4}x + 11$

B. $y = -\frac{33}{4}x + 12$

C. $y = -\frac{33}{4}x + 1$

D. $y = -\frac{33}{4}x + 2$

Hướng dẫn giải:

Chọn C

Gọi $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm

Ta có: $y' = 3x^2 + 6x - 6$.

Phương trình tiếp tuyến có dạng: $y = (3x_0^2 + 6x_0 - 6)(x - x_0) + x_0^3 + 3x_0^2 - 6x_0 + 1$

Vì tiếp tuyến đi qua $N(0; 1)$ nên ta có:

$$1 = (3x_0^2 + 6x_0 - 6)(-x_0) + x_0^3 + 3x_0^2 - 6x_0 + 1$$

$$\Leftrightarrow 2x_0^3 + 3x_0^2 = 0 \Leftrightarrow x_0 = 0, x_0 = -\frac{3}{2}$$

• $x_0 = 0 \Rightarrow y'(x_0) = -6$. Phương trình tiếp tuyến: $y = -6x + 1$.

• $x_0 = -\frac{3}{2} \Rightarrow y_0 = \frac{107}{8}, y'(x_0) = -\frac{33}{4}$. Phương trình tiếp tuyến

$$y' = -\frac{33}{4}\left(x + \frac{3}{2}\right) + \frac{107}{8} = -\frac{33}{4}x + 1.$$

Câu 13. Cho hàm số $y = x^4 + x^2 + 1$ (C). Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C), biết tiếp tuyến đi qua điểm $M(-1; 3)$.

A. $y = -6x - 2$

B. $y = -6x - 9$

C. $y = -6x - 3$

D. $y = -6x - 8$

Hướng dẫn giải:

Chọn C

Ta có: $y' = 4x^3 + 2x$. Gọi $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm

Phương trình tiếp tuyến có dạng:

$$y = (4x_0^3 + 2x_0)(x - x_0) + x_0^4 + x_0^2 + 1$$

Vì tiếp tuyến đi qua $M(-1; 3)$ nên ta có:

$$3 = (4x_0^3 + 2x_0)(-1 - x_0) + x_0^4 + x_0^2 + 1 \Leftrightarrow 3x_0^4 + 4x_0^3 + x_0^2 + 2x_0 + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x_0 + 1)^2(3x_0^2 - 2x_0 + 2) = 0 \Leftrightarrow x_0 = -1 \Rightarrow y_0 = 3, y'(x_0) = -6$$

Phương trình tiếp tuyến: $y = -6x - 3$.

Câu 14. Cho hàm số $y = \frac{2x+2}{x-1}$ (C). Viết phương trình tiếp tuyến của (C), biết tiếp tuyến đi qua điểm

$A(4; 3)$

A.
$$\begin{cases} y = -\frac{1}{9}x + \frac{1}{9} \\ y = -\frac{1}{4}x + \frac{1}{4} \end{cases}$$

B.
$$\begin{cases} y = -\frac{1}{9}x + \frac{31}{9} \\ y = -\frac{1}{4}x + \frac{31}{4} \end{cases}$$

C.
$$\begin{cases} y = -\frac{1}{9}x + \frac{1}{9} \\ y = -\frac{1}{4}x + \frac{31}{4} \end{cases}$$

D.
$$\begin{cases} y = -\frac{1}{9}x + \frac{31}{9} \\ y = -\frac{1}{4}x + \frac{1}{4} \end{cases}$$

Hướng dẫn giải:

Chọn D

Hàm số xác định với mọi $x \neq 1$. Ta có: $y' = \frac{-4}{(x-1)^2}$

Gọi $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm, suy ra phương trình tiếp tuyến của (C):

Vì tiếp tuyến đi qua $A(4; 3)$ nên ta có: $3 = \frac{-4}{(x_0-1)^2}(4-x_0) + \frac{2x_0+2}{x_0-1}$

$\Leftrightarrow 3(x_0-1)^2 = 4(x_0-4) + 2(x_0^2-1) \Leftrightarrow x_0^2 - 10x_0 - 21 = 0 \Leftrightarrow x_0 = -3, x_0 = 7$

• $x_0 = 7 \Rightarrow y_0 = \frac{8}{3}, y'(x_0) = -\frac{1}{9}$. Phương trình tiếp tuyến

$y = -\frac{1}{9}(x-7) + \frac{8}{3} = -\frac{1}{9}x + \frac{31}{9}$.

• $x_0 = -3 \Rightarrow y_0 = 1, y'(x_0) = -\frac{1}{4}$. Phương trình tiếp tuyến

$y = -\frac{1}{4}(x+3) + 1 = -\frac{1}{4}x + \frac{1}{4}$.

Câu 15. Cho hàm số $y = \frac{2x+1}{x-1}$ (C). Viết phương trình tiếp tuyến của (C) biết tiếp tuyến đi qua

$A(-7; 5)$.

A. $y = -\frac{3}{4}x + \frac{1}{4}, y = \frac{3}{16}x + \frac{29}{16}$

B. $y = -\frac{3}{4}x - \frac{1}{2}, y = \frac{3}{16}x + \frac{2}{16}$

C. $y = -\frac{3}{4}x - \frac{1}{4}, y = \frac{3}{16}x + \frac{9}{16}$

D. $y = -\frac{3}{4}x - \frac{1}{4}, y = \frac{3}{16}x + \frac{29}{16}$

Hướng dẫn giải:

Chọn D

Ta có $y' = \frac{-3}{(x-1)^2}$. Gọi $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm. Do tiếp tuyến đi qua $A(-7; 5)$ nên ta có:

$5 = \frac{-3}{(x_0-1)^2}(-7-x_0) + \frac{2x_0+1}{x_0-1} \Leftrightarrow x_0^2 - 4x_0 - 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = -1 \\ x_0 = 5 \end{cases}$

Từ đó ta tìm được các tiếp tuyến là: $y = -\frac{3}{4}x - \frac{1}{4}, y = \frac{3}{16}x + \frac{29}{16}$.

Câu 16. Viết phương trình tiếp tuyến d của đồ thị (C): $y = \frac{2x+1}{x+1}$ biết d cách đều 2 điểm $A(2; 4)$

và $B(-4; -2)$.

A. $y = \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}, y = x + 3, y = x + 1$

B. $y = \frac{1}{4}x + \frac{5}{2}, y = x + 5, y = x + 4$

C. $y = \frac{1}{4}x + \frac{5}{4}, y = x + 4, y = x + 1$

D. $y = \frac{1}{4}x + \frac{5}{4}, y = x + 5, y = x + 1$

Hướng dẫn giải:

Chọn D

Gọi $M(x_0; y(x_0))$, $x_0 \neq -1$ là tọa độ tiếp điểm của d và (C)

Khi đó d có hệ số góc $y'(x_0) = \frac{1}{(x_0+1)^2}$ và có phương trình là :

$$y = \frac{1}{(x_0 + 1)^2}(x - x_0) + 2 - \frac{1}{x_0 + 1}$$

Vì d cách đều A, B nên d đi qua trung điểm $I(-1;1)$ của AB hoặc cùng phương với AB .

TH1: d đi qua trung điểm $I(-1;1)$, thì ta luôn có:

$$1 = \frac{1}{(x_0 + 1)^2}(-1 - x_0) + 2 - \frac{1}{x_0 + 1}, \text{ phương trình này có nghiệm } x_0 = 1$$

Với $x_0 = 1$ ta có phương trình tiếp tuyến $d: y = \frac{1}{4}x + \frac{5}{4}$.

TH2: d cùng phương với AB , tức là d và AB có cùng hệ số góc, khi đó $y'(x_0) = k_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = 1$

$$\text{hay } \frac{1}{(x_0 + 1)^2} = 1 \Leftrightarrow x_0 = -2 \text{ hoặc } x_0 = 0$$

Với $x_0 = -2$ ta có phương trình tiếp tuyến $d: y = x + 5$.

Với $x_0 = 0$ ta có phương trình tiếp tuyến $d: y = x + 1$.

Vậy, có 3 tiếp tuyến thỏa mãn đề bài: $y = \frac{1}{4}x + \frac{5}{4}, y = x + 5, y = x + 1$

Câu 17. Tìm $m \in \mathbb{R}$ để từ điểm $M(1;2)$ kẻ được 2 tiếp tuyến đến đồ thị

$$(C_m): y = x^3 - 2x^2 + (m-1)x + 2m.$$

A. $m = \frac{10}{81}, m = -3$

B. $m = \frac{100}{81}, m = 3$

C. $m = \frac{10}{81}, m = 3$

D. $m = \frac{100}{81}, m = -3$

Hướng dẫn giải:

Chọn D

Gọi $N(x_0; y_0) \in (C)$. Phương trình tiếp tuyến (d) của A tại N là:

$$y = (3x_0^2 - 4x_0 + m - 1)(x - x_0) + x_0^3 - 2x_0^2 + (m - 1)x_0 + 2m$$

$$M \in (d) \Leftrightarrow 2x_0^3 + 5x_0^2 - 4x_0 = 3 - 3m \quad (*)$$

Để thấy (*) là phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị $y = 3 - 3m$ và $f(x_0) = 2x_0^3 + 5x_0^2 - 4x_0$.

Xét hàm số $f(x_0) = 2x_0^3 + 5x_0^2 - 4x_0$ có $f'(x_0) = 6x_0^2 + 10x_0 - 4$

$$f'(x_0) = 0 \Leftrightarrow x_0 = -2 \text{ hoặc } x_0 = \frac{1}{3}.$$

Lập bảng biến thiên, suy ra $m = \frac{100}{81}, m = -3$

Câu 18. Cho hàm số $y = 2x^4 - 4x^2 - 1$ có đồ thị là (C). Viết phương trình tiếp tuyến của (C), biết tiếp tuyến đi qua $A(1; -3)$.

A. $\Delta: y = -3$ hay $\Delta: y = -\frac{64}{27}x - \frac{1}{81}$

B. $\Delta: y = -3$ hay $\Delta: y = -\frac{64}{27}x - \frac{1}{8}$

C. $\Delta: y = -3$ hay $\Delta: y = -\frac{64}{27}x - \frac{51}{2}$

D. $\Delta: y = -3$ hay $\Delta: y = -\frac{64}{27}x - \frac{51}{81}$

Hướng dẫn giải:

Chọn D

Ta có $y' = 8x^3 - 8x$

Gọi $M(x_0; y_0)$. Tiếp tuyến Δ tại M có phương trình:

$$y = (8x_0^3 - 8x_0)(x - x_0) + 2x_0^4 - 4x_0^2 - 1. \text{ Vì tiếp tuyến } \Delta \text{ đi qua } A(1; -3) \text{ nên ta có}$$

$$-3 = (8x_0^3 - 8x_0)(1 - x_0) + 2x_0^4 - 4x_0^2 - 1$$

$$\Leftrightarrow 3x_0^4 - 4x_0^3 - 2x_0^2 + 4x_0 - 1 = 0 \Leftrightarrow (x_0 - 1)^2(x_0 + 1)(3x_0 - 1) = 0$$

- $x_0 = \pm 1 \Rightarrow \Delta : y = -3$
- $x_0 = \frac{1}{3} \Rightarrow \Delta : y = -\frac{64}{27}x - \frac{51}{81}$.

Câu 19. Cho hàm số $y = 2x^4 - 4x^2 - 1$ có đồ thị là (C). Viết phương trình tiếp tuyến của (C), biết tiếp tuyến tiếp xúc với (C) tại hai điểm phân biệt.

- A. $\Delta : y = -3$ B. $\Delta : y = 4$ C. $\Delta : y = 3$ D. $\Delta : y = -4$

Hướng dẫn giải:

Chọn A

Ta có $y' = 8x^3 - 8x$

Gọi $M(x_0; y_0)$. Tiếp tuyến Δ tại M có phương trình:

$y = (8x_0^3 - 8x_0)(x - x_0) + 2x_0^4 - 4x_0^2 - 1$. Giả sử Δ tiếp xúc với (C) tại điểm thứ hai $N(n; 2n^4 - 4n^2 - 1)$

Suy ra: $\Delta : y = (8n^3 - 8n)(x - n) + 2n^4 - 4n^2 - 1$

Nên ta có:
$$\begin{cases} 8x_0^3 - 8x_0 = 8n^3 - 8n \\ -6x_0^4 + 4x_0^2 - 1 = -6n^4 + 4n^2 - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0^2 + nx_0 + n^2 - 1 = 0 \\ (x_0 + n)(3x_0^2 + 3n^2 - 2) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0^2 + x_0n + n^2 - 1 = 0 \\ x_0 + n = 0 \end{cases} \text{ (I) hoặc } \Leftrightarrow \begin{cases} x_0^2 + x_0n + n^2 - 1 = 0 \\ 3x_0^2 + 3n^2 - 2 = 0 \end{cases} \text{ (II)}$$

Ta có (I) $\Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = -n \\ n = \pm 1 \end{cases}$; (II) $\Leftrightarrow \begin{cases} x_0^2 + n^2 = \frac{2}{3} \\ x_0n = \frac{1}{3} \end{cases}$ vô nghiệm. Vậy $\Delta : y = -3$.

Câu 20. Cho (C) là đồ thị của hàm số $y = \frac{x^3}{3} - x^2 + 2x + 1$. Viết phương trình tiếp tuyến của (C) biết tiếp tuyến đó cắt trục hoành, trục tung lần lượt tại A, B sao cho tam giác OAB vuông cân (O là gốc tọa độ).

- A. $y = x + \frac{1}{3}$. B. $y = x + \frac{4}{3}$. C. $y = x + \frac{4}{13}$. D. $y = x - \frac{4}{3}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn B

Vì tam giác OAB là tam giác vuông tại O nên nó chỉ có thể vuông cân tại O, khi đó góc giữa tiếp tuyến (D) và trục Ox là 45° , suy ra hệ số góc của (D) là

$k_D = \pm 1$

Trường hợp $k_D = 1$, khi đó phương trình (D) : $y = x + a$. ($a \neq 0$)

(D) tiếp xúc (C) $\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^3}{3} - x^2 + 2x + 1 = x + a & (3) \\ x^2 - 2x + 2 = 1 & (4) \end{cases}$ có nghiệm.

(4) $\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Thay $x = 1$ vào phương trình (3) ta được $a = \frac{4}{3}$.

Vậy trong trường hợp này, phương trình (D): $y = x + \frac{4}{3}$

Trường hợp $k_D = -1$, khi đó phương trình (D): $y = -x + a$.

(D) tiếp xúc với (C) $\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^3}{3} - x^2 + 2x + 1 = -x + a & (5) \\ x^2 - 2x + 2 = -1 & (6) \end{cases}$ có nghiệm

(6) $\Leftrightarrow x^2 - 2x + 3 = 0$. P/t này vô nghiệm nên hệ (5), (6) vô nghiệm, suy ra (D) : $y = -x + a$ không tiếp xúc với (C).

Vậy phương trình tiếp tuyến cần tìm là $y = x + \frac{4}{3}$.

Câu 21. Cho hàm số $y = x^3 - 2x^2 + (m-1)x + 2m$ có đồ thị là (C_m) . Tìm m để từ điểm $M(1; 2)$ vẽ đến (C_m) đúng hai tiếp tuyến.

A. $\begin{cases} m = -3 \\ m = \frac{10}{81} \end{cases}$

B. $\begin{cases} m = 3 \\ m = \frac{100}{81} \end{cases}$

C. $\begin{cases} m = 3 \\ m = \frac{10}{81} \end{cases}$

D. $\begin{cases} m = -3 \\ m = \frac{100}{81} \end{cases}$

Hướng dẫn giải:

Chọn D

Ta có: $y' = 3x^2 - 4x + m - 1$. Gọi $A(x_0; y_0)$ là tọa độ tiếp điểm.

Phương trình tiếp tuyến Δ tại A:

$$y = (3x_0^2 - 4x_0 + m - 1)(x - x_0) + x_0^3 - 2x_0^2 + (m - 1)x_0 + 2m$$

$$M \in \Delta \Leftrightarrow 2 = (3x_0^2 - 4x_0 + m - 1)(1 - x_0) + x_0^3 - 2x_0^2 + (m - 1)x_0 + 2m \Leftrightarrow 2x_0^3 + 5x_0^2 - 4x_0 + 3m - 3 = 0 \quad (*)$$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow (*)$ có đúng hai nghiệm phân biệt (1)

Xét hàm số: $h(t) = 2t^3 + 5t^2 - 4t$, $t \in \mathbb{R}$

$$\text{Ta có: } h'(t) = 6t^2 + 10t - 4 \Rightarrow h'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{3}, t = -2$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-2	$\frac{1}{3}$	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	$\nearrow 12$	$\searrow -\frac{19}{27}$	$\nearrow +\infty$	

Dựa vào bảng biến thiên, suy ra (1) $\Leftrightarrow \begin{cases} 3 - 3m = 12 \\ 3 - 3m = -\frac{19}{27} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -3 \\ m = \frac{100}{81} \end{cases}$ là những giá trị cần tìm.

Câu 22. Tìm điểm M trên đồ thị (C) : $y = \frac{2x+1}{x-1}$ sao cho khoảng cách từ M đến đường thẳng Δ : $x + 3y - 3 = 0$ đạt giá trị nhỏ nhất.

A. $M(-2; 1)$

B. $M(2; 5)$

C. $M\left(-1; \frac{1}{2}\right)$

D. $M\left(3; \frac{7}{2}\right)$

Hướng dẫn giải:

Chọn A

Gọi $M\left(m; \frac{2m+1}{m-1}\right)$ là tọa độ điểm cần tìm ($m \neq 1$).

Khoảng cách từ M đến đường thẳng Δ là: $d = \frac{\left| m + 3\left(\frac{2m+1}{m-1}\right) - 3 \right|}{\sqrt{1^2 + 3^2}}$ hay $d = \frac{1}{\sqrt{10}} \cdot \frac{m^2 + 2m + 6}{|m-1|}$

Xét hàm số: $f(m) = \frac{m^2 + 2m + 6}{|m-1|} = \begin{cases} \frac{m^2 + 2m + 6}{-(m-1)} & \text{khi } m < 1 \\ \frac{m^2 + 2m + 6}{m-1} & \text{khi } m > 1 \end{cases}$

Ta có: $f'(m) = 0 \Leftrightarrow m = -2$ thỏa $m < 1$ hoặc $m = 4$ thỏa $m > 1$.

Lập bảng biến thiên suy ra $\min d = \frac{2}{\sqrt{10}}$ khi $m = -2$ tức $M(-2; 1)$.

Tiếp tuyến tại M là $y = -\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$, tiếp tuyến này song song với Δ .